

Figura 1 Dos deslizadores unidos por un resorte estirado se sueltan desde el reposo en un riel de aire. El movimiento resultante no es sencillo, excepto para el punto marcado con la bandera, el cual permanece en reposo. Las instantáneas están separadas por intervalos de tiempo iguales. En el caso mostrado, $m_1 = 2m_2$.

que representa la energía potencial del resorte y la energía cinética de los dos cuerpos. La conservación de la energía requiere que la energía E , en cualquier momento sea igual a la energía inicial E_i , lo cual nos da

$$\frac{1}{2}kd_i^2 = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2. \quad (2)$$

Como lo muestra la figura 1, las posiciones de los dos cuerpos están relacionadas por

$$x_2 = x_1 + L + d, \quad (3)$$

donde L es la longitud de relajamiento del resorte. Las ecuaciones 2 y 3 no son suficientes para resolver x_1 y x_2 en función del tiempo y, por lo tanto, no nos es posible completar la solución de este problema sin información adicional.

La información adicional que necesitamos proviene del análisis de un punto particular del sistema de la figura 1. Este punto, llamado *centro de masa* (cm) del sistema, está señalado por una bandera en la figura 1. En este caso especial, el centro de masa no se mueve en absoluto.

Veamos cómo el uso del centro de masa nos ayuda a completar la solución de este problema. La posición del centro de masa se define, para el caso especial de dos partículas en una dimensión, como

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2), \quad (4)$$

donde x_1 y x_2 son las coordenadas x respectivas de las dos partículas. Aquí M es la *masa total* del sistema:

$$M = m_1 + m_2.$$

El centro de masa de un sistema de dos cuerpos es un punto en el espacio definido por la ecuación 4 en una dimensión. No se requiere que sea necesariamente una parte de cualquiera de los cuerpos.

La velocidad del centro de masa, v_{cm} , se encuentra tomando la derivada respecto al tiempo de la ecuación 4:

$$\begin{aligned} v_{cm} &= \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} (m_1x_1 + m_2x_2) \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{M} (m_1v_1 + m_2v_2), \end{aligned} \quad (5)$$

que es la velocidad de la bandera en la figura 1. La aceleración del centro de masa se halla diferenciando nuevamente. El resultado es

$$\begin{aligned} a_{cm} &= \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} (m_1v_1 + m_2v_2) \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{M} (m_1a_1 + m_2a_2), \end{aligned} \quad (6)$$

donde a_1 y a_2 son las aceleraciones respectivas de m_1 y de m_2 .

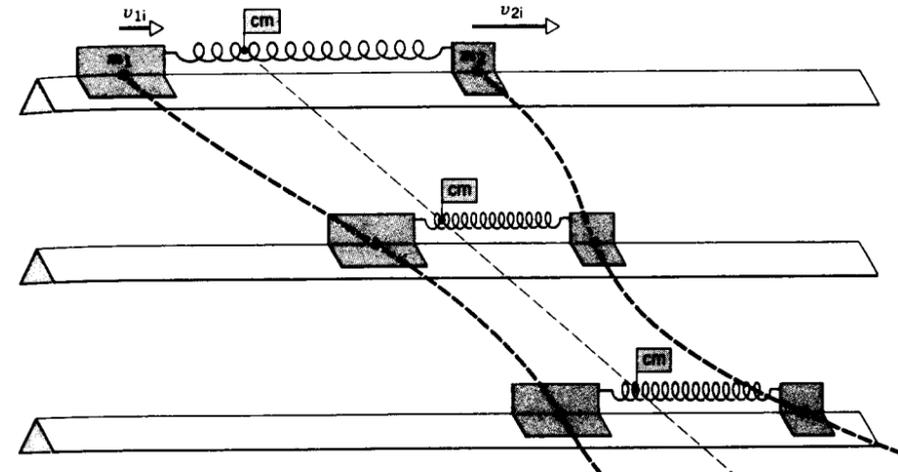


Figura 2 A dos deslizadores unidos por un resorte estirado se les da velocidades iniciales arbitrarias. Los dos deslizadores se mueven en una forma compleja, mientras que el centro de masa, marcado con una bandera, se mueve a velocidad constante. Las instantáneas están separadas por intervalos de tiempo iguales.

Continuamos aplicando las leyes de Newton por separado a m_1 y m_2 . Sea F_{12} la fuerza ejercida sobre m_1 por m_2 , y F_{21} la fuerza ejercida sobre m_2 por m_1 . La segunda ley de Newton aplicada por separado a m_1 y m_2 nos da $F_{12} = m_1a_1$ y $F_{21} = m_2a_2$. (En nuestro ejemplo, es el resorte el que ejerce las fuerzas sobre m_1 y m_2 . Sin embargo, no perdemos generalidad al suponer que los cuerpos ejercen fuerzas directas entre sí, en tanto consideremos que el resorte carece de masa.) La *tercera* ley de Newton requiere que $F_{12} = -F_{21}$. Sustituyendo en la ecuación 6 nos da

$$a_{cm} = \frac{1}{M} (F_{12} + F_{21}) = 0.$$

En este caso especial, en el cual ninguna fuerza neta actúa sobre el sistema, el centro de masa no tiene aceleración y, por lo tanto, se mueve a velocidad constante (que es cero en la Fig. 1). Podríamos entonces completar la solución al combinar las ecuaciones 2 y 3, y usando las ecuaciones 4 y 5 para eliminar, ya sea a x_1 y a v_1 , o a x_2 y a v_2 . (Véase el problema 1.)

La figura 2 ilustra el caso ligeramente más general en el que se le da al resorte una extensión inicial y se les dan a los dos cuerpos velocidades iniciales v_{1i} y v_{2i} . Aquí podemos ver que el centro de masa se mueve a velocidad constante, aun cuando el movimiento del sistema como un todo es bastante complejo.

Las ecuaciones 4 a 6 son aun más generales de lo que nos sugiere este experimento particular. Con objeto de adoptar la situación más general, supongamos ahora que existe una fuerza externa $F_{ext,1}$ sobre m_1 en adición a la fuerza interna F_{12} sobre m_1 causada por m_2 . (Por ejemplo, el riel de aire podría estar inclinado, de modo que actuaría la gravedad; o bien, el experimento podría ser llevado a

cabo sobre una superficie con fricción.) La segunda ley de Newton aplicada a m_1 es

$$F_{ext,1} + F_{12} = m_1a_1. \quad (7)$$

De manera similar, supongamos que actúan sobre m_2 tanto una fuerza externa $F_{ext,2}$ como una fuerza interna F_{21} , y tendremos

$$F_{ext,2} + F_{21} = m_2a_2. \quad (8)$$

Al sumar las ecuaciones 7 y 8 nos da

$$F_{ext,1} + F_{ext,2} + F_{12} + F_{21} = m_1a_1 + m_2a_2. \quad (9)$$

Los primeros dos términos de esta ecuación dan la fuerza externa neta ΣF_{ext} que actúa sobre el sistema (la cual en nuestra exposición anterior supusimos que era cero). La suma de los dos términos siguientes, $F_{12} + F_{21}$, se anula por la tercera ley de Newton, la cual exige que $F_{21} = -F_{12}$. El lado derecho de la ecuación 9 puede expresarse como Ma_{cm} , usando la ecuación 6. Así, tenemos el resultado general

$$\Sigma F_{ext} = Ma_{cm}. \quad (10)$$

Esta ecuación se parece nuevamente mucho a la segunda ley de Newton aplicada a una partícula de igual masa M de nuestro sistema, moviéndose a la misma velocidad v_{cm} en la posición x_{cm} .

Resumiendo nuestros resultados en el caso de un sistema unidimensional de dos partículas, vemos que todo el sistema puede considerarse para ciertos propósitos como si se moviera a una velocidad v_{cm} y tuviera su masa total M concentrada

M concentrada en la posición x_{cm} . Más aún, en ausencia de una fuerza externa neta, $a_{cm} = 0$, y el centro de masa se mueve a velocidad constante. Desarrollaremos a continuación expresiones más generales para estos conceptos.

9-2 SISTEMAS DE MUCHAS PARTÍCULAS

En esta sección generalizaremos los resultados de la sección previa a sistemas tridimensionales que contengan más de dos partículas.

Consideremos un sistema que consista en N partículas de masas m_1, m_2, \dots, m_N . La masa total es

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum m_n.$$

Cada partícula del sistema puede ser representada por su masa m_n (donde $n = 1, 2, \dots, N$), su posición en la coordenada \mathbf{r}_n (cuyas componentes son x_n, y_n , y z_n), su velocidad \mathbf{v}_n (cuyas componentes son v_{nx}, v_{ny} , y v_{nz}), y su aceleración \mathbf{a}_n .

Sobre cada partícula actúa una fuerza \mathbf{F}_n , la cual en general difiere de una partícula a otra. Esta fuerza puede surgir en parte de las otras $N - 1$ partículas y en parte de un agente externo.

El centro de masa del sistema puede definirse por una extensión lógica de la ecuación 4:

$$x_{cm} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_Nx_N) = \frac{1}{M} \sum m_n x_n, \quad (11a)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_Ny_N) = \frac{1}{M} \sum m_n y_n, \quad (11b)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M}(m_1z_1 + m_2z_2 + \dots + m_Nz_N) = \frac{1}{M} \sum m_n z_n. \quad (11c)$$

En la notación vectorial más compacta, estas tres ecuaciones pueden escribirse como una sola expresión que dé la posición del centro de masa:

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots + m_N\mathbf{r}_N) = \frac{1}{M} \sum m_n \mathbf{r}_n. \quad (12)$$

Usando la derivada de esta expresión, hallamos la velocidad del centro de masa:

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{d\mathbf{r}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \dots + m_N \frac{d\mathbf{r}_N}{dt} \right)$$

o sea

$$\mathbf{v}_{cm} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots + m_N\mathbf{v}_N) = \frac{1}{M} \sum m_n \mathbf{v}_n. \quad (13)$$

Diferenciando, una vez más, hallamos la aceleración del centro de masa:

$$\mathbf{a}_{cm} = \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \dots + m_N\mathbf{a}_N) = \frac{1}{M} \sum m_n \mathbf{a}_n. \quad (14)$$

Podemos reescribir la ecuación 14 así:

$$M\mathbf{a}_{cm} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 + \dots + m_N\mathbf{a}_N$$

o sea

$$M\mathbf{a}_{cm} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N, \quad (15)$$

donde el último resultado se deduce de la aplicación de la segunda ley de Newton, $\mathbf{F}_n = m_n\mathbf{a}_n$, a cada partícula individual. La fuerza total que actúa sobre un sistema de partículas es, entonces, igual a la masa total del sistema multiplicada por la aceleración del centro de masa. La ecuación 15 es precisamente la segunda ley de Newton para el sistema de N partículas tratado como una sola partícula de masa M ubicada en el centro de masa, que se mueve a velocidad \mathbf{v}_{cm} y experimenta una aceleración \mathbf{a}_{cm} .

Es útil simplificar la ecuación 15 un poco más aún. Entre las fuerzas que actúan sobre las partículas están las *fuerzas internas*, que surgen de las interacciones con otras partículas que son parte del sistema, y las *fuerzas externas*, que se originan fuera del sistema que estamos estudiando. Cualquier partícula dada m_n puede experimentar una fuerza ejercida sobre ella por la partícula m_k , la cual escribiremos como \mathbf{F}_{nk} . Esta fuerza determinada es una entre las muchas que integran a \mathbf{F}_n , la fuerza total sobre m_n . De manera similar, la fuerza total sobre la partícula m_k incluye un término \mathbf{F}_{kn} debido a la interacción con la partícula m_n . Según la tercera ley de Newton, $\mathbf{F}_{nk} = -\mathbf{F}_{kn}$, y entonces estas dos fuerzas particulares se cancelan al llevar a cabo la suma de todas las fuerzas en la ecuación 15. De hecho, todas esas fuerzas internas son parte de pares acción-reacción y se cancelan. (En el capítulo 5 advertíamos que las fuerzas de acción y de reacción deben aplicarse a partículas diferentes y, por lo tanto, no pueden oponerse entre sí. No estamos violando aquí este hecho, porque estamos aplicando la acción a una partícula y la reacción a otra. Aquí, la distinción consiste en que estamos sumando para obtener la fuerza neta sobre las *dos*

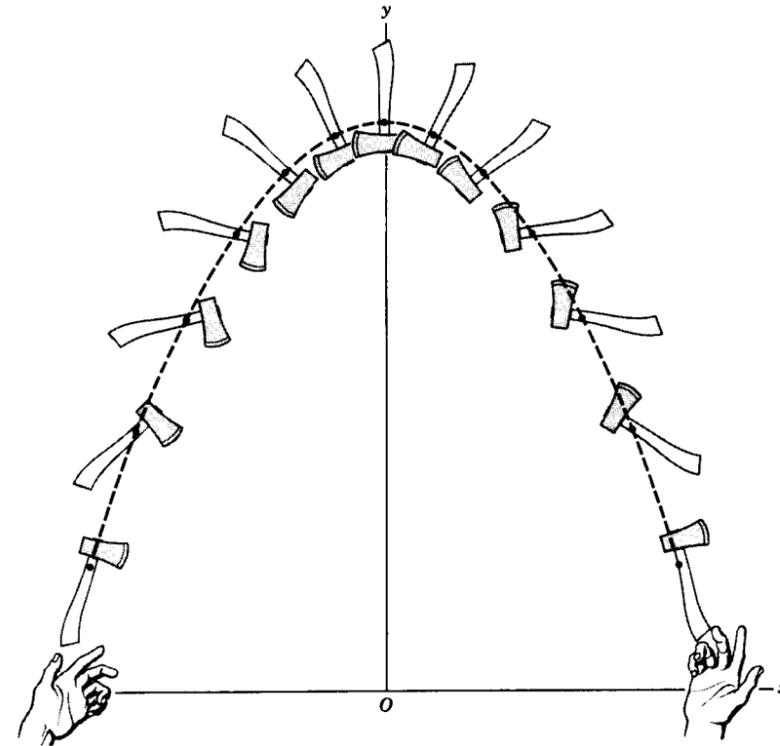


Figura 3 Un hacha se lanza al aire entre dos personas, y gira al mismo tiempo que se traslada. La trayectoria parabólica del centro de masa (representado por el punto en el mango del hacha) está indicada por la línea punteada. Una partícula lanzada al aire de la misma manera seguiría esa misma trayectoria. Ningún otro punto del hacha se mueve de forma tan simple.

partículas, en cuyo caso las componentes de acción y reacción, las cuales se aplican todavía a partículas diferentes, en realidad se cancelan.)

Todo lo que queda en la ecuación 15 es el total de todas las fuerzas *externas*, y la ecuación 15 se reduce a

$$\sum \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm}, \quad (16)$$

que puede expresarse en función de sus componentes como sigue:

$$\sum F_{ext,x} = Ma_{cm,x}, \quad \sum F_{ext,y} = Ma_{cm,y},$$

y

$$\sum F_{ext,z} = Ma_{cm,z}.$$

Podemos resumir este importante resultado como sigue:

El movimiento de traslación total de un sistema de partículas puede ser analizado usando las leyes de Newton como si toda la masa estuviera concentrada en el centro de masa y la fuerza externa total estuviera aplicada en ese punto.

Se deduce inmediatamente un corolario en el caso $\sum \mathbf{F}_{ext} = 0$:

Si la fuerza externa neta sobre un sistema de partículas es cero, entonces el centro de masa del sistema se mueve a velocidad constante.

Esto explica la observación hecha en la sección 9-1 al estudiar el problema de las dos masas unidas por un resorte.

Éstos son resultados generales que se aplican tanto a series de partículas individuales como a partículas unidas entre sí por fuerzas internas, como en un objeto sólido. El objeto, en sí mismo, puede estar efectuando cualquier clase de movimiento complicado, pero el centro de masa se moverá conforme a la ecuación 16. La figura 3 muestra un objeto complejo que se mueve bajo la influencia de la gravedad. A la vez que se traslada, también gira. Su centro de masa, sin embargo, sigue una trayectoria parabólica simple. En lo que respecta a la fuerza externa (la gravedad), el sistema se comporta como si fuera una partícula de masa M ubicada en el centro de masa. Un problema complicado se reduce, por tanto, a dos problemas relativamente sencillos: la trayectoria parabólica del centro de masa y una rotación respecto al centro de masa.

Como un ejemplo más, consideremos al sistema Tierra-Luna moviéndose bajo la gravedad del Sol (la fuerza externa). La figura 4 muestra que el centro de masa del sistema sigue una órbita estable alrededor del Sol; ésta es la trayectoria que seguiría una partícula de masa $m_{Tierra} + m_{Luna}$. La Tierra y la Luna giran también con respecto a sus centros de masa, dando por resultado una ligera oscilación de la Tierra con respecto a la trayectoria de la órbita estable. Usando los datos del apéndice C, nos será posible demostrar que el centro de masa del sistema Tierra-Luna está a unos 4600 km del centro de la Tierra y, por lo tanto, está en el interior de la Tierra.

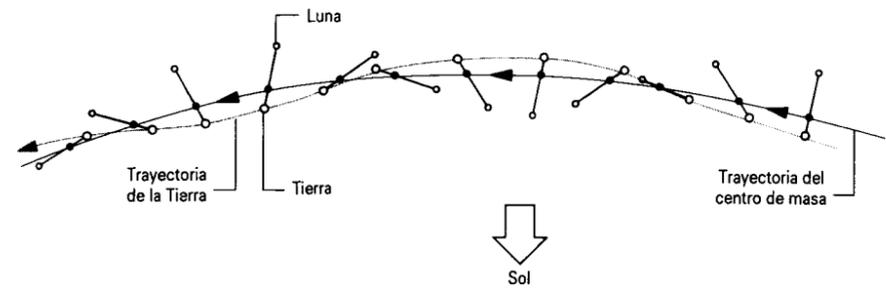


Figura 4 El centro de masa del sistema Tierra-Luna sigue una órbita casi circular con respecto al Sol, mientras que la Tierra y la Luna giran alrededor de su centro de masa común, exactamente igual que el hacha de la figura 3. Este efecto, que causa un ligero “bamboleo” en la órbita de la Tierra, se halla representado de manera muy exagerada en la figura. El centro de masa del sistema Tierra-Luna se halla en realidad dentro de la Tierra, de modo que la Tierra siempre se traslapa con la trayectoria orbital del centro de masa.

La figura 5 muestra el movimiento de un misil balístico que se separa en tres vehículos de reentrada múltiple (MRV). En efecto, una explosión separa a los tres vehículos pero, como la explosión genera solamente fuerzas internas, no afecta al movimiento del centro de masa. El centro de masa continúa describiendo la trayectoria balística como si no hubiera ocurrido la explosión, hasta que uno o más de los vehículos experimente una fuerza externa, como la proveniente de la resistencia atmosférica al avance o el impacto en un blanco.

Problema muestra 1 La figura 6a muestra un sistema de tres partículas, inicialmente en reposo, de masas $m_1 = 4.1 \text{ kg}$, $m_2 = 8.2 \text{ kg}$, y $m_3 = 4.1 \text{ kg}$. Fuerzas externas diferentes actúan sobre las partículas, de magnitudes $F_1 = 6 \text{ N}$, $F_2 = 12 \text{ N}$, y $F_3 = 14 \text{ N}$. En la figura se muestran las direcciones de las fuerzas. ¿Dónde está el centro de masa de este sistema, y cuál es la aceleración del centro de masa?

Solución La posición del centro de masa está señalada en la figura por un punto. Como lo sugiere la figura 6b, tratamos a

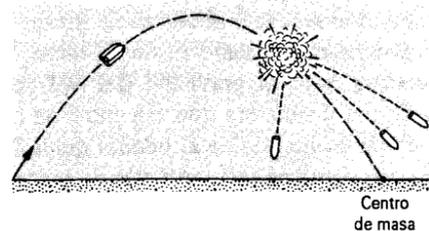


Figura 5 Un misil que contiene tres cabezas explosivas sigue una trayectoria parabólica. Una explosión separa las tres cabezas, las cuales se trasladan de modo que su centro de masa describe la trayectoria parabólica original. Por simplicidad no se muestra el “vehículo” de las tres cabezas explosivas.

este punto como una partícula real, de una masa M igual a la masa del sistema de 16.4 kg ($m_1 + m_2 + m_3$), y suponiendo que todas las fuerzas externas ejerzan su acción en ese punto. Hallamos el centro de masa partiendo de las ecuaciones 11a y 11b:

$$\begin{aligned} x_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} (m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) \\ &= \frac{1}{16.4 \text{ kg}} [(4.1 \text{ kg})(-2 \text{ cm}) + (8.2 \text{ kg})(4 \text{ cm}) \\ &\quad + (4.1 \text{ kg})(1 \text{ cm})] = 1.8 \text{ cm}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} (m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3) \\ &= \frac{1}{16.4 \text{ kg}} [(4.1 \text{ kg})(3 \text{ cm}) + (8.2 \text{ kg})(2 \text{ cm}) \\ &\quad + (4.1 \text{ kg})(-2 \text{ cm})] = 1.3 \text{ cm}. \end{aligned}$$

Nótese aquí el uso bastante aceptable de unidades mixtas.

La componente x de la fuerza externa neta que actúa sobre el centro de masa es (véase la Fig. 6b):

$$\begin{aligned} F_{\text{ext},x} &= F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ &= -6 \text{ N} + (12 \text{ N})(\cos 45^\circ) + 14 \text{ N} = 16.5 \text{ N}, \end{aligned}$$

y la componente y es

$$\begin{aligned} F_{\text{ext},y} &= F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \\ &= 0 + (12 \text{ N})(\sin 45^\circ) + 0 = 8.5 \text{ N}. \end{aligned}$$

La fuerza externa neta tiene, entonces, una magnitud de

$$F_{\text{ext}} = \sqrt{(F_{\text{ext},x})^2 + (F_{\text{ext},y})^2} = \sqrt{(16.5 \text{ N})^2 + (8.5 \text{ N})^2} = 18.6 \text{ N}$$

y forma un ángulo con el eje x dado por

$$\phi = \tan^{-1} \frac{F_{\text{ext},y}}{F_{\text{ext},x}} = \tan^{-1} \frac{8.5 \text{ N}}{16.5 \text{ N}} = 27^\circ.$$

Ésta es también la dirección del vector de aceleración. Según la ecuación 16, la magnitud de la aceleración del centro de masa está dada por

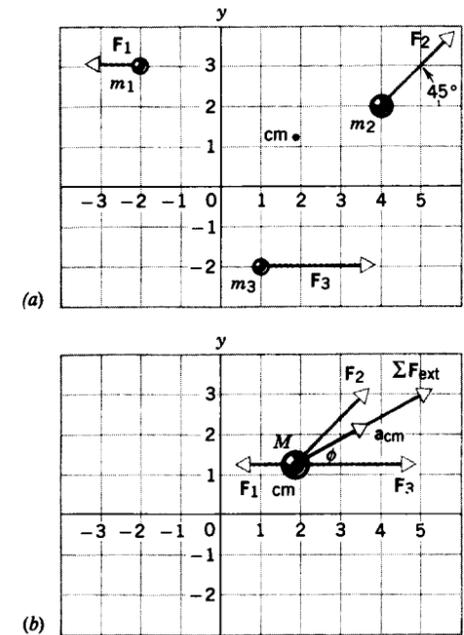


Figura 6 Problema muestra 1. (a) Las fuerzas mostradas actúan sobre tres partículas, situadas en reposo en las posiciones mostradas. Se ha marcado el centro de masa del sistema. (b) El movimiento de traslación de todo el sistema puede ser representado por el movimiento de una partícula de masa total M situada en el centro de masa y sobre la que actúan las tres fuerzas externas. Se muestran la fuerza y la aceleración del centro de masa resultantes.

$$a_{\text{cm}} = \frac{F_{\text{ext}}}{M} = \frac{18.6 \text{ N}}{16.4 \text{ kg}} = 1.1 \text{ m/s}^2.$$

Las tres partículas de la figura 6a, como también su centro de masa, se mueven con aceleraciones constantes (diferentes). Si las partículas parten del reposo, cada una se moverá, a velocidad siempre creciente, a lo largo de una línea recta en dirección de la fuerza que actúa sobre ellas.

Problema muestra 2 En el sistema que se ilustra en la figura 7a, hallar la magnitud común de las aceleraciones de los dos bloques. Ya hemos resuelto este problema, como problema muestra 8 del capítulo 5, aplicando las leyes de Newton a cada bloque por separado. Resuelva el problema en este caso considerando el movimiento del centro de masa del sistema de dos partículas.

Solución La figura 7b muestra el diagrama de cuerpo libre del sistema de dos partículas. Hallamos primero el centro de masa aplicando las ecuaciones 11a y 11b al sistema mostrado en la figura 7b:

$$x_{\text{cm}} = -\frac{m_1}{M} (L - y) \quad \text{y} \quad y_{\text{cm}} = \frac{m_2}{M} y,$$

donde L es la longitud del cordón y y es la coordenada vertical de m_2 .

Diferenciando con respecto al tiempo, podemos hallar las componentes de la velocidad del centro de masa:

$$v_{\text{cm},x} = \frac{m_1}{M} v \quad \text{y} \quad v_{\text{cm},y} = \frac{m_2}{M} v,$$

donde $v (= dy/dt)$ es la magnitud común de las velocidades de los dos bloques. Diferenciando de nuevo, podemos hallar las componentes de la aceleración:

$$a_{\text{cm},x} = \frac{m_1}{M} a \quad \text{y} \quad a_{\text{cm},y} = \frac{m_2}{M} a,$$

donde $a (= dv/dt)$ es la magnitud común de las aceleraciones de los dos bloques.

A continuación, aplicamos las leyes de Newton. En la figura 7b, la fuerza externa ejercida por el soporte sin fricción del cordón de unión es descompuesto en sus componentes x y y , cada una de magnitud T (la tensión del cordón). Al usar la Ec. 16 nos da

$$\begin{aligned} \text{componente } x: & \quad T = Ma_{\text{cm},x}, \\ \text{componente } y: & \quad m_1 g - N + m_2 g - T = Ma_{\text{cm},y}. \end{aligned}$$

Sustituyendo para $a_{\text{cm},x}$ y $a_{\text{cm},y}$, podemos entonces eliminar a T de estas dos ecuaciones y obtener, con $m_1 g = N$,

$$a = g \frac{m_2}{M},$$

de acuerdo con el resultado obtenido previamente en el capítulo 5.

Nótese que en este problema muestra debemos considerar la fuerza externa ejercida sobre el sistema por el soporte sin fricción, la cual no interviene al considerar a las fuerzas sobre los cuerpos 1 y 2 por separado.

Si el sistema se suelta desde el reposo cuando m_2 está en su posición más alta, el movimiento resultante del centro de masa se efectúa a lo largo de la línea recta que se muestra en la figura 7c. La dirección de a_{cm} puede ser hallada al sumar vectorialmente las cinco fuerzas que actúan sobre el sistema mostrado en la figura 7b.

9-3 CENTRO DE MASA DE OBJETOS SÓLIDOS

Sería sumamente engorroso hallar el centro de masa de un objeto sólido usando la ecuación 12 y haciendo la suma para cada átomo del sistema. En su lugar, dividiremos al objeto en elementos pequeños de masa δm_n . Cuando estos elementos se vuelven infinitesimalmente pequeños, las sumas de las ecuaciones 11 y 12 se transforman en integrales:

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum x_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int x \, dm, \quad (17a)$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum y_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int y \, dm, \quad (17b)$$

$$z_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum z_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int z \, dm. \quad (17c)$$

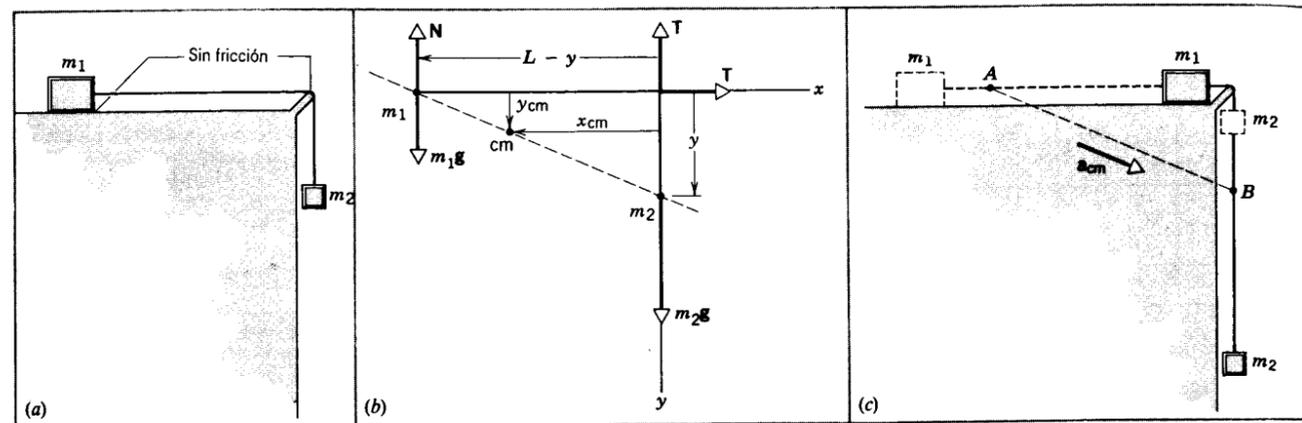


Figura 7 Problema muestra 2. (a) Dos masas están unidas por un cordón de longitud L que pasa sobre un soporte sin fricción. (b) Un diagrama parcial de cuerpo libre muestra las fuerzas *externas* que actúan en el sistema. El soporte sin fricción ejerce una fuerza externa sobre el cordón cuyas componentes son cada una igual a la tensión T del cordón (el cual es una fuerza *interna* y, por lo tanto, no se muestra). (c) El centro de masa se mueve desde el punto A , cuando m_2 está en su posición más alta, hasta el punto B , cuando m_1 llega al soporte. Al caer m_2 , m_1 se mueve hacia la derecha y, por lo tanto, el centro de masa debe moverse hacia la derecha. La fuerza horizontal T es la única fuerza externa posible que puede dar por resultado un movimiento horizontal del centro de masa. La gravedad, por supuesto, proporciona la fuerza externa responsable del movimiento del centro de masa hacia abajo.

En la forma vectorial, estas ecuaciones pueden escribirse así:

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} dm. \quad (18)$$

En muchos casos es posible usar argumentos basados en la geometría o en la simetría para simplificar el cálculo del centro de masa de objetos sólidos. Si un objeto tiene una simetría esférica, el centro de masa debe estar en el centro geométrico de la esfera. (No es necesario que su densidad sea constante; una bola de béisbol, por ejemplo, tiene una simetría esférica aunque esté compuesta por capas de materiales diferentes. Su centro de masa está en su centro geométrico. Cuando nos referimos a la simetría esférica, queremos decir que la densidad puede variar con r pero debe tener la misma variación en cada dirección.) Si un sólido tiene una simetría cilíndrica (esto es, si su masa está distribuida simétricamente con respecto a un eje), entonces el centro de masa debe estar en el eje. Si su masa está distribuida simétricamente con respecto a un plano, entonces el centro de masa debe estar en el plano.

A menudo encontramos objetos sólidos, irregulares que pueden ser divididos en varias partes. Podemos hallar el centro de masa de cada parte y luego, al tratar a cada parte como una partícula ubicada en su propio centro de masa, podemos hallar el centro de masa de la combinación.

Como ejemplo, consideremos la placa triangular que se muestra en la figura 8. Dividimos a la placa en un número

grande de franjas delgadas paralelas a la base del triángulo, como en la figura 8a. El centro de masa de cada franja debe estar en su centro geométrico y, por lo tanto, el centro de masa de la placa debe estar en alguna parte a lo largo de la línea que une a los centros de las franjas. (Reemplacemos cada franja con una masa puntual ubicada en el centro de masa de la franja. La hilera de las masas puntuales forma, en efecto, un objeto unidimensional cuyo centro de masa estará con toda seguridad a lo largo de su longitud.) Repitiendo este procedimiento con franjas trazadas paralelamente a los otros dos lados (Figs. 8b y 8c), obtenemos dos líneas adicionales, cada una de las cuales debe

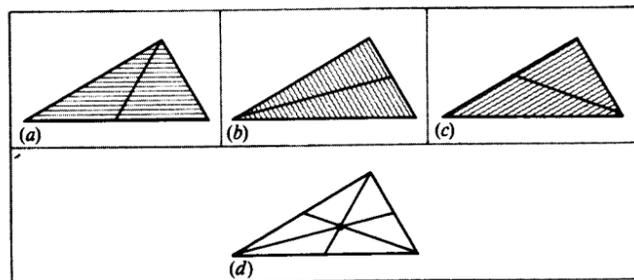


Figura 8 En (a), (b) y (c), el triángulo está dividido en franjas delgadas, paralelas a cada uno de los tres lados. El centro de masa debe estar a lo largo de las líneas divisorias simétricas que se muestran. (d) El punto negro, el único punto común a las tres líneas, es la posición del centro de masa.

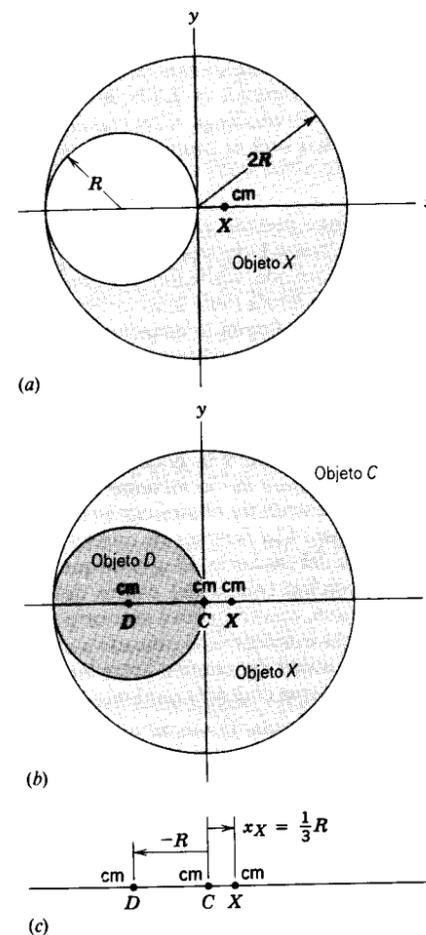


Figura 9 Problema muestra 3. (a) El objeto X es un disco de metal de radio $2R$ con un orificio de radio R . (b) El objeto D es un disco de metal que llena el orificio del objeto X ; su centro de masa está en $x_D = -R$. El objeto C es el disco compuesto hecho de los objetos X y D ; su centro de masa está en el origen. (c) Los centros de masa de los tres objetos.

también incluir al centro de masa de la placa. Superponiendo las tres líneas, como en la figura 8d, hallamos que tienen solamente un punto en común, el cual debe ser, por lo tanto, el centro de masa.

Problema muestra 3 La figura 9a muestra una placa circular de metal de radio $2R$ de la que se ha extraído un disco de radio R . Llamémosle el objeto X . Su centro de masa se marca con un punto sobre el eje x . Ubique este punto.

Solución La figura 9b muestra el objeto X , estando su orificio lleno con un disco de radio R , al cual llamaremos objeto D . Sea C el gran disco compuesto uniforme así formado. Por simetría, el centro de masa del objeto C está en el origen del sistema de coordenadas, como se muestra.

Al hallar el centro de masa de un objeto compuesto, suponemos que las masas de sus componentes están concentradas en

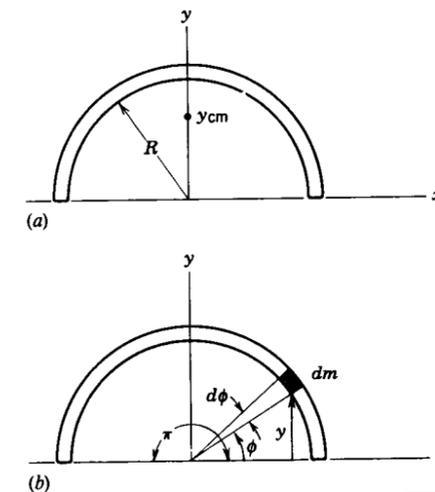


Figura 10 Problema muestra 4. (a) Una tira delgada de metal doblada en forma de semicírculo. (b) Un elemento de la tira de masa dm ubicado en la coordenada ϕ .

sus centros de masa individuales. Entonces el objeto C puede ser tratado como equivalente a dos masas puntuales, representando a los objetos X y D . La figura 9c muestra las posiciones de los centros de masa de estos tres objetos.

La posición del centro de masa del objeto C está dada por la ecuación 11a como:

$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X},$$

donde x_D y x_X son las posiciones de los centros de masa de los objetos D y X , respectivamente. Observando que $x_C = 0$ y resolviendo para x_X , obtenemos

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X}.$$

La razón m_D/m_X debe de ser la misma que la razón de las áreas de los objetos D y X (suponiendo que la placa tenga densidad y espesor uniformes). Esto es,

$$\begin{aligned} \frac{m_D}{m_X} &= \frac{\text{area of } D}{\text{area of } X} = \frac{\text{area of } D}{\text{area of } C - \text{area of } D} \\ &= \frac{\pi R^2}{\pi(2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Con $x_D = -R$, obtenemos:

$$x_X = \frac{1}{3}R.$$

Problema muestra 4 Una tira delgada de material está doblada en forma de semicírculo de radio R (Fig. 10). Halle su centro de masa.

Solución En este caso, el uso de una coordenada angular simplifica la integración que va a llevarse a cabo. Además, por la simetría del objeto, concluimos que el centro de masa debe estar sobre el eje y (esto es, $x_{cm} = 0$). Por lo tanto, usaremos la ecuación 17b para hallar y_{cm} . Consideremos el pequeño elemen-

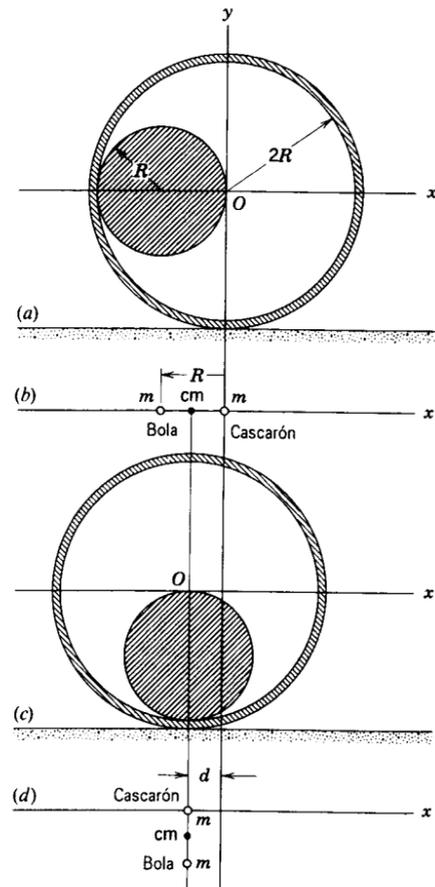


Figura 11 Problema muestra 5. (a) Una bola de radio R se deja caer desde esta posición inicial y es libre de rodar dentro de un cascarón esférico de radio $2R$. (b) Los centros de masa de la bola, el cascarón, y su combinación. (c) El estado final después de que la bola ha llegado al reposo. El cascarón se ha movido de tal forma que el centro de masa del sistema permanece en su lugar. (d) Los centros de masa de la bola, el cascarón, y su combinación.

to de masa dm que se muestra en la figura 10b. Subtiende un ángulo $d\phi$, y puesto que la masa total M de la tira subtiende un ángulo π (un círculo completo subtendería un ángulo 2π), la masa dm debe de ser la misma fracción de M como $d\phi$ lo es de π . Esto es, $dm/M = d\phi/\pi$, o $dm = (M/\pi)d\phi$. El elemento dm está ubicado en la coordenada $y = R \sin \phi$. En este caso podemos escribir la ecuación 17b así:

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{M} \int_0^\pi (R \sin \phi) \frac{M}{\pi} d\phi$$

$$= \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \sin \phi d\phi = \frac{2R}{\pi} = 0.637R.$$

El centro de masa está aproximadamente a dos tercios de un radio situado a lo largo del eje y . Obsérvese que, como ilustra este caso, el centro de masa no necesita estar dentro del volumen o del material de un objeto.

Problema muestra 5 Una bola de masa m y radio R está situada dentro de un cascarón esférico de la misma masa m y de radio interior $2R$. La combinación está en reposo sobre una mesa como se muestra en la figura 11a. La bola se suelta, oscila en vaivén adentro, y por último llega al reposo en el fondo, como en la figura 11c. ¿Cuál será el desplazamiento d del cascarón durante el proceso?

Solución Las únicas fuerzas externas que actúan sobre el sistema bola-cascarón son la fuerza de la gravedad hacia abajo y la fuerza normal ejercida verticalmente hacia arriba por la mesa. Ninguna de las fuerzas tiene una componente horizontal, de modo que $\Sigma F_{ext,x} = 0$. Según la ecuación 16 la componente $a_{cm,x}$ de la aceleración del centro de masa debe también ser cero. Entonces, la posición horizontal del centro de masa del sistema debe permanecer fija, y el cascarón debe moverse de tal modo que esto suceda así.

Podemos representar tanto a la bola como al cascarón por partículas aisladas de masa m , localizadas en sus respectivos centros. La figura 11b muestra el sistema antes de que la bola se deje caer, y la figura 11d después de que la bola ha llegado al reposo en el fondo del cascarón. Elegimos que nuestro origen coincida con la posición inicial del centro del cascarón. La figura 11b muestra que, con respecto a este origen, el centro de masa del sistema bola-cascarón está ubicado a una distancia $\frac{1}{2}R$ hacia la izquierda, a mitad del camino entre las dos partículas. La figura 11d muestra que el desplazamiento del cascarón está dado por

$$d = \frac{1}{2}R.$$

El cascarón debe recorrer hacia la izquierda esta distancia mientras la bola llega al reposo.

La bola llega al reposo por la fuerza de fricción que actúa entre ella y el cascarón. ¿Por qué no afecta esta fuerza de fricción a la ubicación final del centro de masa?

9-4 ÍMPETU LINEAL DE UNA PARTÍCULA

El ímpetu de una partícula aislada es un vector \mathbf{p} definido como el producto de su masa m por su velocidad \mathbf{v} :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (19)$$

El ímpetu, por ser el producto de una cantidad escalar por una vectorial, es en sí mismo un vector. Puesto que es proporcional a \mathbf{v} , el ímpetu \mathbf{p} de una partícula depende del marco de referencia del observador; debemos siempre especificar este marco.

Newton, en sus famosos *Principia*, expresó la segunda ley del movimiento en función del ímpetu (al cual llamó "cantidad de movimiento"). Expresado en la terminología moderna la segunda ley de Newton se lee así:

La razón de cambio del ímpetu de un cuerpo es igual a la fuerza resultante que actúa sobre el cuerpo y está en la dirección de esa fuerza.

En forma simbólica esto se convierte en

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (20)$$

Aquí $\Sigma \mathbf{F}$ representa la fuerza resultante que actúa sobre la partícula.

Para una partícula aislada de masa constante, esta forma de la segunda ley es equivalente a la forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ que hemos venido usando hasta ahora. Esto es, si m es constante, entonces

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}.$$

Las relaciones $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ y $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ para partículas aisladas son completamente equivalentes en la mecánica clásica.

Se halla una relación conveniente entre el ímpetu y la energía cinética al combinar $K = \frac{1}{2}mv^2$ y $p = mv$, lo cual da

$$K = \frac{p^2}{2m}. \quad (21)$$

Ímpetu a velocidades elevadas (Opcional)

Con velocidades de la partícula cercanas a la velocidad de la luz (región en la que debe usarse la teoría de la relatividad en lugar de la mecánica newtoniana), la segunda ley de Newton en la forma $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ya no tiene validez. Sin embargo, sucede que la segunda ley de Newton en la forma $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ es todavía una ley válida si el ímpetu \mathbf{p} de una partícula aislada se define no como $m\mathbf{v}$ sino como

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (22)$$

donde c es la velocidad de la luz. A velocidades ordinarias ($v \ll c$), la ecuación 22 se reduce a la ecuación 19.

Para partículas relativistas, puede demostrarse que la relación básica entre el ímpetu y la energía cinética es

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2. \quad (23)$$

Derivaremos este resultado en el capítulo 21. La figura 12 muestra una comparación entre el resultado clásico (Ec. 21) y el relativista (Ec. 23) en partículas para un intervalo de velocidades. Obviamente, el resultado clásico no funciona para velocidades elevadas. Como lo esperábamos (véase el problema 27), la ecuación 23 se reduce a la ecuación 21 para velocidades ordinarias.

Independientemente de la forma en que escribamos la energía cinética, ésta tiene dimensiones de la masa por la velocidad al cuadrado, que es lo mismo que el ímpetu multiplicado por la velocidad. Por lo tanto, podemos escribir, usando nuestra notación de la sección 1-7 para indicar dimensiones,

$$[p] = \frac{[K]}{[v]}.$$

A menudo resulta conveniente expresar el ímpetu en unidades de energía divididas por la velocidad y, al trabajar con partículas, son elecciones convenientes las expresiones eV/c , MeV/c , etc. Esto nos permite expresar la cantidad pc en unidades de energía tales como MeV , lo cual es mucho más conveniente al trabajar con expresiones como la ecuación 23. Para un electrón con un ímpetu dado de $1.5 \text{ MeV}/c$, por ejemplo, el término pc de la

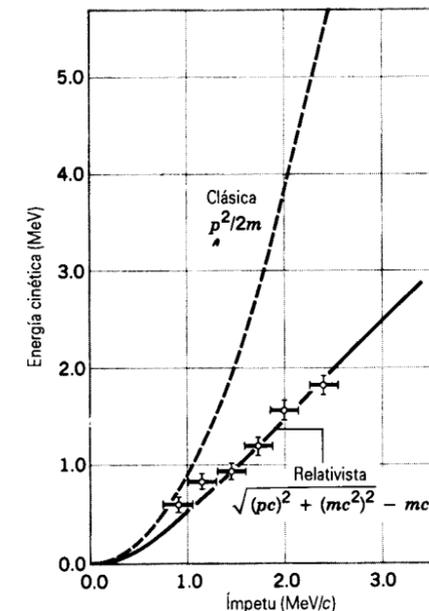


Figura 12 Una comparación de las relaciones clásica (Ec. 21) y relativista (Ec. 23) entre el ímpetu y la energía cinética para electrones emitidos en ciertos procesos de desintegración radioactiva. Los círculos representan las mediciones experimentales; las barras horizontales y verticales que pasan a través de los círculos representan el margen de incertidumbre en estas mediciones. Los datos favorecen obviamente la relación relativista. Nótese que, a baja velocidad (energía e ímpetu pequeños), las dos relaciones son indistinguibles.

ecuación 23 es de 1.5 MeV y puede calcularse fácilmente que la energía cinética del electrón es, según esa ecuación, 1.1 MeV .

En la región de velocidades muy altas de la partícula, el ímpetu p de la partícula puede ser tan grande que el término pc de la ecuación 23 resulta mucho más grande que el término mc^2 , por lo que la ecuación se reduce entonces a $K = pc$ con una buena aproximación. La expresión del ímpetu en unidades de energía divididas por c es especialmente útil en esta región. Por ejemplo, un electrón cuyo ímpetu sea de $500 \text{ MeV}/c$ tiene una energía cinética muy cercana a los 500 MeV . (Obsérvese que esta aproximación es muy pobre para el electrón de 1.5 MeV considerado anteriormente.) ■

9-5 ÍMPETU LINEAL DE UN SISTEMA DE PARTÍCULAS

Supongamos que en lugar de una partícula aislada tenemos un sistema de N partículas, con masas m_1, m_2, \dots, m_N . Supongamos también que ninguna masa entra o sale del sistema de modo que la masa total $M (= \Sigma m_i)$ del sistema permanece constante en el tiempo. Las partículas pueden interactuar entre sí, y las fuerzas externas pueden actuar igualmente sobre ellas. Cada partícula tiene cierta veloci-

dad y cierto ímpetu en el marco de referencia particular que se esté usando. El sistema, como un todo, tiene un ímpetu total \mathbf{P} , el cual se define simplemente como el vector suma de los ímpetus de las partículas individuales en este mismo marco, o sea

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2 + \dots + m_N\mathbf{v}_N. \quad (24)$$

Si comparamos esta relación con la ecuación 13, vemos de inmediato que

$$\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm}, \quad (25)$$

la cual es una definición equivalente al ímpetu de un sistema de partículas:

El ímpetu lineal total de un sistema de partículas es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad de su centro de masa.

Si diferenciamos la ecuación 25 con respecto al tiempo obtenemos, para una masa constante M supuesta,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{cm}}{dt} = M\mathbf{a}_{cm}. \quad (26)$$

La comparación de la ecuación 26 con la ecuación 16, $\Sigma \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm}$, nos permite escribir la segunda ley de Newton para un sistema de partículas en la forma:

$$\Sigma \mathbf{F}_{ext} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}. \quad (27)$$

La ecuación 27 afirma que, en un sistema de partículas, la fuerza externa neta es igual a la velocidad de cambio del ímpetu lineal del sistema. Esta ecuación es la generalización de la ecuación de una partícula aislada, $\Sigma \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (Ec. 20), a un sistema de muchas partículas, cuando ninguna masa entra o sale del sistema. La ecuación 27 se reduce a la ecuación 20 para el caso especial de una partícula aislada, puesto que sólo pueden actuar fuerzas externas sobre un sistema de una sola partícula. En la sección 9-8 consideraremos las modificaciones de la ecuación 27 para sistemas de masa variable.

9-6 CONSERVACIÓN DEL ÍMPETU LINEAL

Supongamos que la suma de las fuerzas externas que actúa sobre un sistema es cero. Entonces, según la ecuación 27,

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{o} \quad \mathbf{P} = \text{una constante.}$$

Cuando la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es cero, el vector del ímpetu total del sistema permanece constante.

Este resultado sencillo, pero de carácter general, se llama ley de conservación del ímpetu lineal. Al igual que la ley de conservación de la energía, la ley de conservación del ímpetu lineal se aplica a una gran variedad de situaciones físicas y no tiene excepciones conocidas.

Las leyes de conservación (tales como las de la energía y del ímpetu lineal, que ya hemos visto, y las del ímpetu angular y la carga eléctrica, que veremos más adelante en el texto) son de importancia teórica y práctica en la física, porque son sencillas y universales. Las leyes de conservación de la energía y del ímpetu lineal, por ejemplo, van más allá de las limitaciones de la mecánica clásica y permanecen válidas tanto en el ámbito relativista como en el cuántico.

Todas las leyes de la conservación tienen la forma siguiente. Mientras, el sistema está cambiando, existe un aspecto del mismo, por otra parte, que permanece inalterable. Observadores diferentes, cada uno de ellos en un marco de referencia diferente, al observar el cambio de un mismo sistema, estarían todos de acuerdo en que las leyes de conservación se aplican al sistema. Por ejemplo, para la conservación del ímpetu lineal, observadores situados en marcos de referencia inerciales diferentes, asignarían valores diferentes de \mathbf{P} al ímpetu lineal del sistema, pero todos estarían de acuerdo (suponiendo que $\Sigma \mathbf{F}_{ext} = 0$) en que el valor de \mathbf{P} permanece sin cambio mientras se mueven las partículas que forman el sistema. La fuerza \mathbf{F} es invariante con respecto a las transformaciones galileanas (todos los observadores inerciales están de acuerdo en su medición). Si $\Sigma \mathbf{F}_{ext} = 0$ en cualquier marco inercial, entonces todos los observadores inerciales hallarán también que $\Sigma \mathbf{F}_{ext} = 0$ y llegarán a la conclusión de que ese ímpetu se conserva.

El ímpetu total de un sistema puede ser cambiado solamente por las fuerzas externas que actúen sobre el sistema. Las fuerzas internas, por ser iguales y opuestas, producen cambios de ímpetu iguales y opuestos, que se cancelan entre sí. En un sistema de partículas en el cual no actúe ninguna fuerza externa,

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N = \text{una constante.} \quad (28)$$

Los ímpetus de las partículas individuales pueden cambiar, pero su suma permanece constante si no existe fuerza externa alguna.

El ímpetu es una cantidad vectorial. La ecuación 28 es, por lo tanto, equivalente a tres ecuaciones escalares, una para cada dirección de las coordenadas. De aquí que la conservación del ímpetu lineal nos proporciona las tres condiciones del movimiento de un sistema al cual se aplique. Por otra parte, la conservación de la energía nos

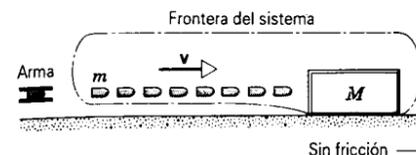


Figura 13 Problema muestra 6. Un arma dispara una ráfaga de balas contra un bloque de madera. Analizamos el sistema que definimos que consta del bloque y las balas en vuelo.

proporciona solamente una condición del movimiento de un sistema al que se aplique, porque la energía es una cantidad escalar.

Si nuestro sistema de partículas consta solamente de una partícula aislada, entonces la ecuación 28 se reduce a afirmar que, si ninguna fuerza neta actúa sobre ella, el ímpetu de la partícula es una constante, lo cual es equivalente (para una partícula aislada) a afirmar que su velocidad es una constante. Esto es, simplemente, otra forma de enunciar la primera ley de Newton.

Problema muestra 6 Una ráfaga de balas de masa m y de 3.8 g cada una, se dispara horizontalmente con una velocidad v de 1100 m/s contra un gran bloque de madera de masa M (= 12 kg) que inicialmente está en reposo sobre una mesa horizontal; véase la figura 13. Si el bloque puede deslizarse sin fricción por la mesa, ¿qué velocidad adquirirá después de que se han incrustado en él 8 balas?

Solución La ecuación 28 (\mathbf{P} = una constante) es válida solamente para sistemas cerrados, en los que no entre ni salga partícula alguna. Entonces nuestro sistema debe incluir tanto al bloque como a las 8 balas, considerado como un todo. En la figura 13, hemos identificado a este sistema trazando una curva cerrada a su alrededor.

Por ahora, consideraremos solamente la dirección horizontal. No actúa ninguna fuerza externa horizontal sobre el sistema bloque + balas. Las fuerzas que actúan cuando las balas chocan contra el bloque son fuerzas internas y no contribuyen a \mathbf{F}_{ext} , la cual no tiene una componente horizontal.

Puesto que no actúan fuerzas externas (horizontales), podemos aplicar la ley de conservación del ímpetu (Ec. 28). El ímpetu inicial (horizontal), medido mientras las balas están todavía en camino y el bloque está en reposo, es

$$P_i = N(mv),$$

en el cual mv es el ímpetu de una bala individual y $N = 8$. El ímpetu final, medido cuando todas las balas estén en el bloque y el bloque se deslice sobre la mesa a velocidad V , es

$$P_f = (M + Nm)V.$$

La conservación del ímpetu requiere que

$$P_i = P_f$$

o sea

$$N(mv) = (M + Nm)V.$$

Resolviendo para V nos da

$$V = \frac{Nm}{M + Nm} v = \frac{(8)(3.8 \times 10^{-3} \text{ kg})}{12 \text{ kg} + (8)(3.8 \times 10^{-3} \text{ kg})} (1100 \text{ m/s}) = 2.8 \text{ m/s}.$$

Con la elección que hemos hecho del sistema, no tuvimos que considerar las fuerzas ejercidas cuando las balas penetran en el bloque. Esas fuerzas son todas internas.

En dirección vertical, las fuerzas externas son el peso de las balas, el peso del bloque, y la fuerza normal sobre el bloque. Mientras que las balas están en vuelo, adquieren la componente de un ímpetu vertical pequeño como resultado de la acción de la gravedad. Cuando las balas chocan contra el bloque, el bloque debe ejercer sobre cada bala una fuerza con componentes tanto horizontal como vertical. Junto con la fuerza vertical sobre la bala, que es necesaria para que su ímpetu vertical cambie a cero, debe haber (de acuerdo con la tercera ley de Newton) un aumento correspondiente de la fuerza normal ejercida sobre el bloque por la superficie horizontal. Este aumento no sólo se debe al peso de la bala encajada; tiene una contribución adicional que proviene de la razón de cambio del ímpetu vertical de la bala. Cuando todas las balas hayan llegado al reposo respecto al bloque, la fuerza normal será igual a los pesos combinados del bloque y de las balas encajadas.

Por simplicidad, para la resolución de este problema hemos supuesto que las balas se disparan tan rápidamente que las 8 están en vuelo antes que la primera bala llegue al bloque. ¿Puede usted resolver este problema sin hacer esta suposición?

Supongamos que la frontera del sistema se amplía de modo que incluya al arma, la cual se halla fija a la Tierra. ¿Cambia el ímpetu horizontal de este sistema antes y después del disparo? ¿Existe una fuerza externa horizontal?

Problema muestra 7 Como lo muestra la figura 14, un cañón cuya masa M es de 1300 kg dispara una bala de 72 kg en dirección horizontal a una velocidad de salida de $v = 55$ m/s. El cañón está montado de modo que pueda recular libremente. (a) ¿Cuál es la velocidad V del cañón al recular respecto a la Tierra? (b) ¿Cuál es la velocidad inicial v_i de la bala respecto a la Tierra?

Solución (a) Elegimos como nuestro sistema al cañón + la bala. Al hacerlo así, las fuerzas asociadas con el disparo del cañón son internas al sistema, y no tenemos que tratar con ellas. Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema no tienen componentes horizontales. Así, la componente horizontal del ímpetu lineal total del sistema debe permanecer sin cambio cuando el cañón es disparado.

Elegimos un marco de referencia fijo respecto a la Tierra y suponemos que todas las velocidades son positivas si apuntan hacia la derecha en la figura 14.

Antes de ser disparado el cañón, el sistema tiene un ímpetu inicial P_i igual a cero. Después de haber sido disparada, la bala tiene una velocidad horizontal v con respecto al cañón al recular, siendo v la velocidad de salida del cañón. Sin embargo, en el marco de referencia de la Tierra la velocidad horizontal de la bala es $v + V$. Entonces, el ímpetu lineal total del sistema después del disparo es

$$P_f = MV + m(v + V),$$

donde el primer término de la derecha es el ímpetu del cañón al recular y el segundo término el de la bala cuando va en camino.

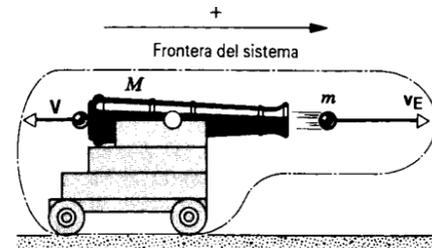


Figura 14 Problema muestra 7. Un cañón de masa M dispara una bala de masa m . Las velocidades de la bala y del cañón al recular se muestran en un marco de referencia fijo en la Tierra. Las velocidades se consideran positivas hacia la derecha.

La conservación del ímpetu lineal en la dirección horizontal requiere que $P_i = P_f$, o sea

$$0 = MV + m(v + V).$$

Resolviendo para V nos da

$$V = -\frac{mv}{M+m} = -\frac{(72 \text{ kg})(55 \text{ m/s})}{1300 \text{ kg} + 72 \text{ kg}} = -2.9 \text{ m/s}.$$

El signo menos nos dice que el cañón recula hacia la izquierda en la figura 14, como esperábamos que lo haría.

(b) La velocidad de la bala respecto al cañón (al recular) es la velocidad de salida v . Con respecto a la Tierra, la velocidad de la bala es

$$v_E = v + V = 55 \text{ m/s} + (-2.9 \text{ m/s}) = 52 \text{ m/s}.$$

A causa de la reculada, la bala se mueve un poco más lentamente respecto a la Tierra de lo que lo haría de no existir reculada. Nótese la importancia, en este problema, de elegir al sistema (cañón + bala) de manera acertada y siendo absolutamente claro respecto al marco de referencia (la Tierra o la reculada del cañón) al que se refieren las diversas mediciones.

Problema muestra 8 La figura 15 muestra dos bloques unidos por un resorte y libres de deslizarse sobre una superficie horizontal sin fricción. Los bloques, cuyas masas son m_1 y m_2 , son separados y luego soltados a partir de una situación en reposo. ¿Qué fracción de la energía cinética total del sistema tendrá cada bloque en cualquier tiempo posterior?

Solución Tomamos a los dos bloques y al resorte (supuesto sin masa) como nuestro sistema y, como marco de referencia, a la superficie horizontal sobre la que se deslizan. Suponemos que las velocidades son positivas si apuntan hacia la derecha en la figura 15.

El ímpetu inicial P_i del sistema antes de soltar a los bloques es cero. El ímpetu final, en cualquier tiempo después de haber soltado a los bloques, es

$$P_f = m_1v_1 + m_2v_2,$$

donde v_1 y v_2 son las velocidades de los bloques. La conservación del ímpetu requiere que $P_i = P_f$, o sea,

$$0 = m_1v_1 + m_2v_2.$$

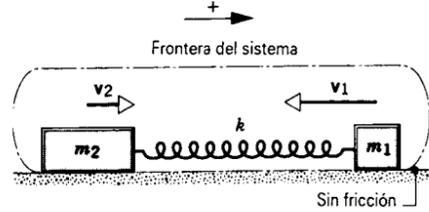


Figura 15 Problema muestra 8. Dos bloques, descansando sobre una superficie sin fricción y unidos por un resorte, han sido apartados y luego soltados desde el reposo. El ímpetu total inicial es cero, y así debe permanecer en todos los tiempos sucesivos.

Entonces, tenemos que

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1}, \quad (29)$$

diciéndonos el signo menos que las dos velocidades tienen siempre direcciones opuestas. Esto se cumple para cualquier instante después de haber soltado a los bloques, no importa cuál sea la velocidad de cada uno de ellos.

Las energías cinéticas de los bloques son $K_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$ y $K_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$. La fracción que buscamos es, para el bloque de masa m_1 ,

$$f_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2}.$$

Sustituyendo $v_2 = -v_1(m_1/m_2)$ nos lleva, después de un poco de álgebra, a

$$f_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}.$$

De manera similar, para el bloque de masa m_2 ,

$$f_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}.$$

Entonces, aunque la energía cinética del sistema oscilante varía con el tiempo, la distribución de esta energía entre los dos bloques es una constante, independiente del tiempo, recibiendo el bloque con menor masa la mayor parte de la energía cinética disponible. Si, por ejemplo, $m_2 = 10m_1$, entonces

$$f_1 = \frac{10m_1}{m_1 + 10m_1} = 0.91 \quad \text{y} \quad f_2 = \frac{m_1}{m_1 + 10m_1} = 0.09.$$

En este caso, el bloque menos pesado (m_1) obtiene el 91% de la energía cinética disponible y el bloque más pesado (m_2) obtiene el 9% restante. En el límite $m_2 \gg m_1$, el bloque menos pesado obtiene esencialmente toda la energía cinética.

Las expresiones para f_1 y f_2 se aplican igualmente bien a una piedra que caiga en el campo gravitatorio de la Tierra. Si m_2 representa a la masa de la Tierra y m_1 a la masa de la piedra, en el marco de referencia de sus centros de masa, la piedra toma casi toda la energía cinética ($f \approx 1$) y la Tierra toma muy poca ($f_2 \approx 0$). Las magnitudes de los ímpetus lineales de la piedra y de la Tierra son iguales, aunque la pequeña velocidad de la Tierra es compensada por su enorme masa. Este argumento justifica despreciar la energía cinética de la Tierra cuando usábamos la conservación de la energía en el capítulo 8 para analizar objetos que caen bajo la acción de la gravedad terrestre.

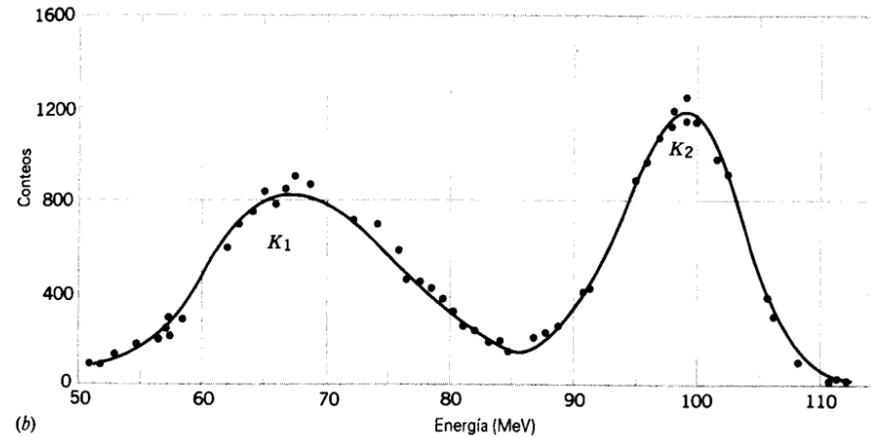
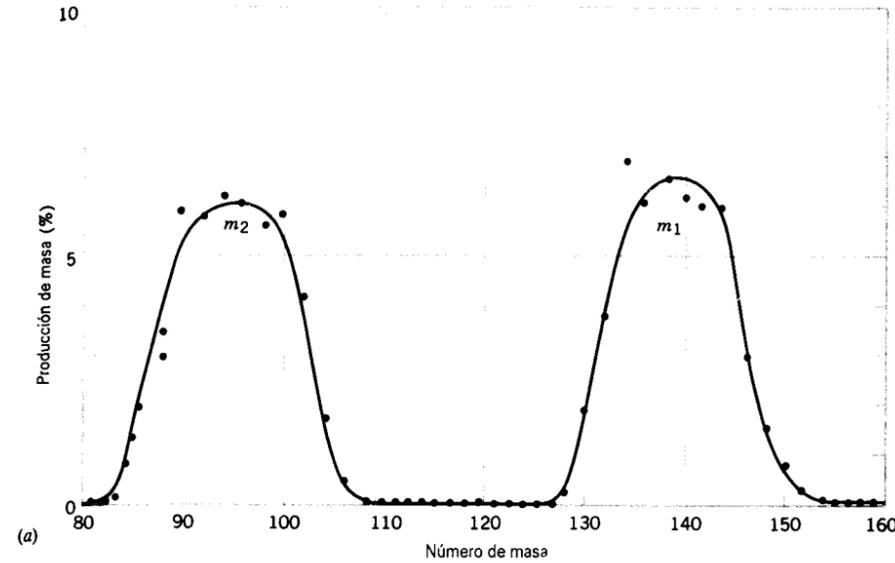


Figura 16 (a) La distribución de masa de los fragmentos emitidos en la fisión nuclear. La escala vertical da la fracción de fisiones que se producen en un fragmento con el número de masa dado por la escala horizontal. (b) La distribución de la energía de los fragmentos emitidos en la fisión.

Otro ejemplo práctico de este efecto ocurre en el caso de la fisión nuclear, en que un núcleo pesado como el ^{235}U se divide en dos fragmentos más ligeros. Los fragmentos son impulsados por su repulsión eléctrica mutua desde una posición inicial en que se encuentran muy próximos entre sí y casi en reposo. De la ecuación 29, esperamos que la razón de las energías cinéticas sea

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1}.$$

Esto es, el fragmento más pesado tiene la energía cinética más pequeña.

La fisión es un proceso estadístico, en el cual existe una distribución de las masas posibles de los fragmentos y una distribución correspondiente de las energías cinéticas de los fragmentos. La figura 16a muestra la distribución de la masa y la figura 16b muestra la distribución de la energía cinética. Nótese que la fisión en fragmentos de igual masa es muy rara; un fragmento tiene usualmente un número de masa de alrededor de 138 y el otro alrededor de 94. Una razón típica de masa m_2/m_1 es, entonces, de alrededor de $94/138 = 0.68$. Una razón típica de energía cinética K_1/K_2 es de alrededor de $67 \text{ MeV}/99 \text{ MeV} = 0.68$, igual a la razón de masa típica, como era de esperarse. Entonces, el reparto de la energía cinética entre los fragmentos

de la fisión se lleva a cabo de acuerdo con la restricción de que el ímpetu se conserva.

9-7 TRABAJO Y ENERGÍA EN UN SISTEMA DE PARTÍCULAS (Opcional)

La figura 17 muestra a un patinador que se impulsa desde una barandilla, ganando energía cinética en el proceso. Si le preguntamos al patinador de dónde proviene esta energía cinética, probablemente nos dirá que, a juzgar por sus esfuerzos musculares, la energía requerida debe provenir de su propia reserva de energía interna. Tratemos de verificar este argumento aplicando la conservación de la energía al sistema que consta únicamente del patinador.

Según la ecuación 28 del capítulo 8 tenemos que

$$\Delta U + \Delta K_{\text{cm}} + \Delta E_{\text{int}} = W. \quad (30)$$

Al derivar la ecuación 33 del capítulo 8, dividamos la energía cinética de un sistema en dos términos: ΔK_{int} , que representa los

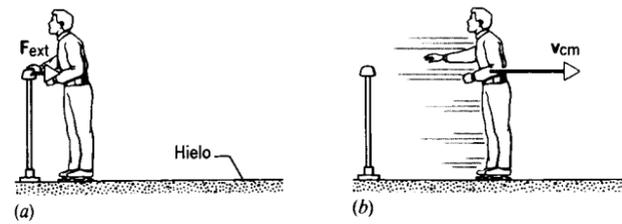


Figura 17 (a) Un patinador se empuja a sí mismo contra la barandilla. La barandilla ejerce una fuerza F_{ext} sobre el patinador. (b) Después de haberse empujado, el patinador se mueve a una velocidad v_{cm} .

movimientos internos de las partículas del sistema, y ΔK , que representaba el movimiento "global" del sistema. Aquí indicamos explícitamente que este movimiento "global" es, de hecho, el movimiento del centro de masa, y la energía cinética correspondiente es

$$K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2, \quad (31)$$

que es la energía cinética que el sistema de masa total M tendría si se moviese como una partícula a una velocidad v_{cm} . La energía cinética interna está incluida en la ecuación 30 como una parte de ΔE_{int} . (Véase el problema 49 para una derivación de esta división de la energía cinética.)

No hay cambios en la energía potencial del patinador (el hielo es horizontal), de modo que hacemos que $\Delta U = 0$. Además, la barandilla no trabaja sobre el patinador porque *el punto de aplicación de la fuerza no se mueve*. Recordemos la explicación que acompañaba a la figura 13 del capítulo 8. Cuando se efectúa un trabajo externo sobre un sistema, la energía se transfiere a través de las fronteras del sistema. No se transfiere ninguna energía de la barandilla al patinador, así que la barandilla no efectúa ningún trabajo externo sobre el patinador. Entonces $W = 0$, y la ecuación 30 se reduce a

$$\Delta K_{cm} = -\Delta E_{int}. \quad (32)$$

Puesto que ΔK_{cm} es una cantidad positiva (el patinador gana energía cinética al empujarse contra la barandilla), ΔE_{int} debe ser una cantidad negativa. Esto confirma el argumento del patinador: la energía cinética que adquiere al empujarse contra la barandilla proviene de su reserva de energía interna y no de alguna fuente externa.

El análisis de la energía es útil, pero podríamos desear ir más allá y analizar el sistema en función de las fuerzas y las aceleraciones. Veamos qué podemos aprender del patinador aplicando la segunda ley de Newton. La barandilla ejerce una fuerza F_{ext} sobre el patinador (al cual continuamos viendo como nuestro sistema). Para empujarse desde la barandilla, el patinador debe estirar, necesariamente, su brazo. Como resultado, las diferentes partes de su cuerpo pueden tener desplazamientos, velocidades, y aceleraciones diferentes mientras se está empujando. Así, el patinador debe de ser tratado no como una partícula aislada sino como un sistema de partículas. En este caso, usando la ecuación 16, podemos hallar la aceleración del centro de masa del patinador si conocemos la fuerza externa ejercida sobre él por la barandilla:

$$F_{ext} = M a_{cm}. \quad (33)$$

Para una partícula aislada, hallamos que el teorema trabajo-energía ($W = \Delta K$) es un resultado útil. Está claro que *no podemos*

aplicar este teorema al patinador, porque éste no se mueve como una partícula única. Como ya lo habíamos deducido, $W = 0$, pero $\Delta K \neq 0$. Entonces la forma de partícula única del teorema trabajo-energía no es válida. Tratemos de hallar una relación que sea aplicable a un sistema de partículas.

Hagamos que una fuerza externa neta F_{ext} actúe sobre un sistema de partículas. Consideremos el caso general en que el punto de aplicación de esta fuerza puede moverse o que (como en el caso del patinador de la Fig. 17) puede *no* moverse en nuestro marco de referencia inercial elegido. Suponemos que todas las fuerzas y movimientos están en la dirección x . Puesto que estamos tratando con un sistema de partículas, enfocamos nuestra atención no al movimiento del punto de aplicación de la fuerza externa sino al movimiento del centro de masa del sistema.

Supongamos que el centro de masa del sistema se mueva una distancia dx_{cm} a lo largo del eje x . Al multiplicar cada lado de la ecuación 33 por dx_{cm} nos da

$$F_{ext} dx_{cm} = M a_{cm} dx_{cm} = M \frac{dv_{cm}}{dt} v_{cm} dt,$$

donde hemos reemplazado a_{cm} por dv_{cm}/dt y a dx_{cm} por $v_{cm} dt$. Esto da

$$F_{ext} dx_{cm} = M v_{cm} dv_{cm}. \quad (34)$$

Supongamos que el centro de masa se mueve desde x_i hasta x_f cuando esta fuerza actúa. Al integrar la ecuación 34 entre estos límites tenemos que

$$\int_{x_i}^{x_f} F_{ext} dx_{cm} = \int_{v_{cm,i}}^{v_{cm,f}} M v_{cm} dv_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm,f}^2 - \frac{1}{2} M v_{cm,i}^2. \quad (35)$$

El lado derecho de la ecuación 35 puede escribirse usando la ecuación 31 en la forma $K_{cm,f} - K_{cm,i} = \Delta K_{cm}$. Esto representa el cambio en la energía cinética que experimentaría una partícula de masa M cuya velocidad cambiara de $v_{cm,i}$ a $v_{cm,f}$.

El lado izquierdo de la ecuación 35 se parece un poco a la definición del trabajo y, de hecho la integral tiene la dimensión de trabajo. Sin embargo, este trabajo no es en el sentido en que lo hemos definido, porque dx_{cm} no es el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza externa. (En nuestra definición original del trabajo $W = \int F dx$ del capítulo 7, dx era el desplazamiento del punto de aplicación de F .) Obsérvese nuevamente que el desplazamiento del punto de aplicación de la fuerza externa es cero en la figura 17, y por lo tanto $W = 0$ en ese caso, pero el lado izquierdo de la ecuación 35 no es cero.*

En muchos casos de interés para nosotros, la fuerza externa es constante y puede ser sacada fuera de la integral en la ecuación 35. El resto de la integral da el desplazamiento neto s_{cm}

* Algunos autores usan los términos *seudotrabajo* o *trabajo del centro de masa* para describir el lado izquierdo de la ecuación 35. Esta ecuación se conoce a veces como la *ecuación del centro de masa*. Nosotros preferimos *no* introducir un término estrechamente relacionado con el trabajo para describir una cantidad que no está relacionada con el significado aceptado de trabajo. Para un compendio general del trabajo y la energía en un sistema de partículas, véase "Developing the Energy Concepts in Introductory Physics", por A. B. Arons, *The Physics Teacher*, octubre de 1989, pág. 506).

del centro de masa del sistema. En este caso podemos reescribir la ecuación 35 así:

$$F_{ext} s_{cm} = \Delta K_{cm}. \quad (36)$$

La ecuación 35 se parece al teorema trabajo-energía para una partícula, y de hecho se reduciría a ese resultado si nuestro sistema constara solamente de una partícula aislada (o de un cuerpo que pueda ser tratado como una partícula). Existe, sin embargo, una diferencia importante entre la ecuación 35 y el teorema trabajo-energía para una partícula. El teorema trabajo-energía para una partícula aislada es también un enunciado sobre la conservación de la energía en el movimiento de una partícula, porque la energía de traslación es la única clase de energía que una partícula puede tener. La ecuación 35, por el contrario, no es en sentido alguno una expresión de la conservación de la energía, porque un sistema de partículas puede tener energía en otras formas, incluyendo la interna, la potencial, y la de rotación, entre otras. Para un sistema de partículas, la ecuación 35 y la conservación de la energía (Ec. 30) pueden aplicarse como relaciones separadas e independientes.

Como un ejemplo de la aplicación de estos principios, consideremos el resultado de empujar una regla de un metro (inicialmente en reposo) que pueda deslizarse libremente sin fricción sobre una superficie horizontal. Ejercemos una fuerza constante de magnitud F_{ext} , la cual puede ser aplicada sobre cualquier parte de la regla. Si aplicamos la fuerza en la marca de 50 cm (Fig. 18a), la regla se mueve como una partícula con una aceleración $a_{cm} = F_{ext}/m$; cada punto de la regla se mueve con esta aceleración. El desplazamiento s del punto en el que aplicamos la fuerza es igual al desplazamiento s_{cm} del centro de masa. En este caso, efectuamos un trabajo de magnitud $F_{ext}s$ cuando toda la regla (que se mueve como una partícula) es desplazada en s_{cm} . La forma de partícula del teorema trabajo-energía puede emplearse para hallar la velocidad resultante v de cada punto de la regla. Consideremos ahora el caso en que la fuerza se ejerce en la marca de 25 cm (Fig. 18b). Si usted trata de llevar a cabo este experimento, hallará que la regla *no* se mueve como una partícula. Como veremos en el capítulo 12, podemos dividir este movimiento complejo en dos partes: el movimiento de traslación como una partícula y la rotación con respecto al centro de masa. El punto en el cual aplicamos la fuerza se mueve una distancia *mayor que* s_{cm} , como lo podemos ver en la figura 18b. El trabajo que efectuamos sobre la regla es, por tanto, *mayor que* $F_{ext}s_{cm}$. Para analizar este movimiento debemos usar ambas ecuaciones 30 y 36. El producto $F_{ext}s_{cm}$ da, usando la ecuación 36, el cambio en la energía cinética de *traslación* de la regla. El producto $F_{ext}s$, donde s es la distancia que se mueve el punto de 25 cm al cual se aplicó la fuerza, da el trabajo W que aparece en la ecuación 30, el cual es una expresión de la conservación de la energía. Como lo expondremos en el capítulo 12, podemos asignar parte de la energía cinética total K al movimiento de traslación y parte al movimiento de rotación.

Problema muestra 9 Un patinador de 72 kg se empuja desde una barandilla, como se muestra en la figura 17, ejerciendo una fuerza constante $F = 55$ N sobre la barandilla al hacerlo. Su centro de masa se mueve a lo largo de una distancia $s_{cm} = 32$ cm hasta que pierde contacto con la barandilla. (a) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del patinador cuando se separa de la barandilla? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía interna almacenada del patinador durante este proceso?

Solución (a) Una vez más el patinador es nuestro sistema. Según la tercera ley de Newton, la barandilla ejerce sobre el

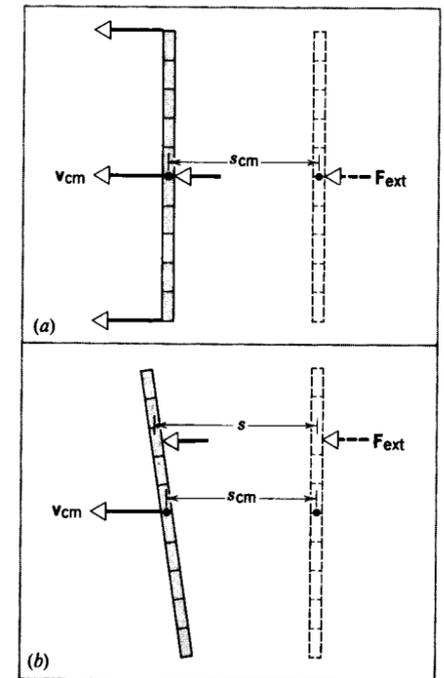


Figura 18 (a) Una regla de un metro es empujada a lo largo de una superficie horizontal sin fricción por una fuerza F_{ext} . La fuerza se ejerce en la marca de 50 cm. Aquí la regla se mueve como una partícula. (b) La fuerza se ejerce ahora sobre la marca de 25 cm. La regla gira ahora al mismo tiempo que se traslada y ya no se mueve como una partícula. La fuerza se ejerce en un desplazamiento s que es mayor que el desplazamiento s_{cm} del centro de masa.

patinador una fuerza de 55 N hacia la derecha en la figura 17. Esta fuerza es la única fuerza externa que necesitamos considerar. Según la ecuación 36, tenemos que

$$F_{ext} s_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 - 0,$$

o sea

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2F_{ext}s_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55 \text{ N})(0.32 \text{ m})}{72 \text{ kg}}} = 0.70 \text{ m/s}.$$

(b) Apliquemos ahora la ley de conservación de la energía, la cual, en las condiciones que corresponden a este problema, toma la forma de la ecuación 32, o sea

$$\Delta E_{int} = -\Delta K_{cm} = -\frac{1}{2} M v_{cm}^2 = -\frac{1}{2} (72 \text{ kg})(0.70 \text{ m/s})^2 = -17.6 \text{ J}.$$

Esta cantidad de energía interna podría reponerse digiriendo $\frac{1}{4}$ de cucharadita de cualquier refresco dietético.

Problema muestra 10 En este caso, nuestro patinador se empuja contra su compañera, quien está parada con la espalda contra una pared, como en la figura 19a. Ambos tienen los brazos doblados inicialmente. Cada uno empuja contra el otro estirando los brazos, hasta que se separan (Fig. 19b). La compañera ejerce una constante de fuerza $F_{ext} = 55$ N a lo largo de una distancia de $s = 32$ cm; ésta es la distancia en que se mueven

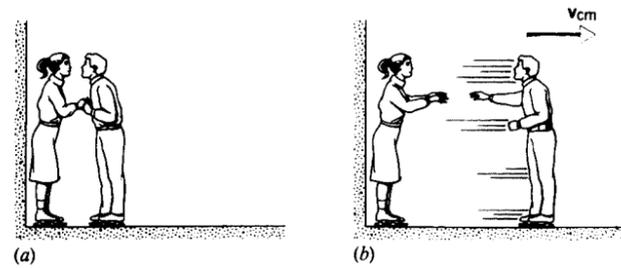


Figura 19 Problema muestra 10. (a) Un patinador y su compañera se preparan para ejercer fuerzas uno contra el otro extendiendo sus brazos. La compañera apoya la espalda contra la pared y, por lo tanto, no se mueve. (b) Después de que los brazos se han extendido, el patinador se mueve a una velocidad v_{cm} .

realmente sus manos al extender sus brazos. En el instante en cesa el contacto, el centro de masa del patinador se ha movido a lo largo de una distancia total de $s_{cm} = 58$ cm como resultado de la extensión de ambos pares de brazos. (a) ¿Cuál es la velocidad del centro de masa del patinador después de haber cesado el contacto? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía interna almacenada del patinador durante este proceso?

Solución (a) Tomamos al patinador como nuestro sistema. Nótese que en este caso existe un trabajo externo efectuado sobre el sistema, de modo que hay una transferencia de energía a través de la frontera del sistema. Según la ecuación 36 tenemos que

$$F_{ext} s_{cm} = \Delta K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 - 0,$$

o sea

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{2F_{ext} s_{cm}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55 \text{ N})(0.58 \text{ m})}{72 \text{ kg}}} = 0.94 \text{ m/s}.$$

(b) Según la ecuación de la conservación de energía para nuestro sistema, tenemos que

$$\Delta K_{cm} + \Delta E_{int} = W,$$

donde $W (= F_{ext} s)$ es el trabajo externo efectuado sobre el patinador por su compañera. Resolviendo para el cambio de energía interna ΔE_{int} y sustituyendo el resultado $\Delta K_{cm} = F_{ext} s_{cm}$ de la parte (a), obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta E_{int} &= W - \Delta K_{cm} = F_{ext} s - F_{ext} s_{cm} \\ &= (55 \text{ N})(0.32 \text{ m}) - (55 \text{ N})(0.58 \text{ m}) \\ &= +17.6 \text{ J} - 31.9 \text{ J} = -14.3 \text{ J}. \end{aligned}$$

Así pues, para lograr su energía cinética final, el patinador debe proporcionar 14.3 J de energía de sus recursos internos. Su compañera proporciona 17.6 J al efectuar el trabajo sobre el patinador, trabajo que, por supuesto, proviene de la reserva interna de ella. Si la compañera no estuviera presente y el patinador hubiera alcanzado la misma energía cinética empujándose directamente contra la pared, necesitaría proporcionar los 31.9 J completos de energía cinética a partir de su fuente de energía interna.

Problema muestra 11 Un bloque de 5.2 kg se proyecta sobre una superficie horizontal a una velocidad horizontal inicial de 0.65 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la

superficie es de 0.12. (a) ¿Qué le pasa a la energía cinética inicial del bloque? (b) ¿Qué distancia recorre el bloque hasta llegar al reposo?

Solución (a) Al aplicar la conservación de energía, el sistema más útil a considerar es el bloque más la porción de la superficie horizontal sobre la que se desliza. Al usar la ecuación 30, tenemos que $\Delta U = 0$, porque no ocurre ningún cambio de energía potencial sobre la superficie horizontal. Además $W = 0$, porque no actúa ninguna fuerza externa sobre el sistema. (Hemos definido al sistema de modo que la fricción sea una fuerza interna.) Así, la ecuación 30 resulta

$$\Delta E_{int} = -\Delta K_{cm},$$

donde ΔK_{cm} es negativa, correspondiendo a una pérdida de energía cinética. Sustituyendo valores, tenemos que

$$\begin{aligned} \Delta E_{int} &= -(0 - \frac{1}{2} M v_{cm}^2) = +\frac{1}{2}(5.2 \text{ kg})(0.65 \text{ m/s})^2 \\ &= +1.1 \text{ J}. \end{aligned}$$

Este aumento en la energía interna del sistema se revela como un incremento pequeño de la temperatura del bloque y de la superficie horizontal. Es difícil de calcular cómo se distribuye esta energía entre el bloque y la superficie; en gran parte evitamos esta dificultad al considerar al sistema formado por el bloque más la superficie, en lugar de analizar el bloque solamente.

(b) En este caso, elegimos al bloque solamente como nuestro sistema. No podemos tratar al bloque como una partícula, porque aquí intervienen las transferencias de energía (específicamente, de la energía interna) distintas a la energía cinética de traslación. Aplicando la ecuación 36, tenemos que

$$F_{ext} s_{cm} = \Delta K_{cm},$$

donde F_{ext} es la fuerza de fricción externa ($= -\mu Mg$, tomando la dirección del movimiento como positiva) que actúa sobre el bloque y s_{cm} es el desplazamiento del centro de masa del bloque. Entonces, tenemos que

$$\begin{aligned} (-\mu Mg)(s_{cm}) &= 0 - \frac{1}{2} M v_{cm}^2 \\ \text{o sea} \quad s_{cm} &= \frac{v_{cm}^2}{2\mu g} = \frac{(0.65 \text{ m/s})^2}{2(0.12)(9.8 \text{ m/s}^2)} = 0.18 \text{ m}. \end{aligned}$$

9-8 SISTEMAS DE MASA VARIABLE (Opcional)

Imaginemos que la cureña que sostiene al cañón en la figura 14 sostiene también a una gran dotación de balas de cañón. Cuando el cañón se dispara repetidamente, la cureña (que suponemos se mueve sin fricción) recula hacia la izquierda, y con cada reculada aumenta su velocidad. Con la frontera del sistema representada como en la figura 14, sabemos que el ímpetu horizontal total debe ser cero y que no existe ninguna fuerza horizontal neta sobre el sistema. Sin embargo, si consideramos un sistema que incluya sólo al cañón más la cureña, entonces el planteamiento previo ya no es válido. El ímpetu del cañón aumenta cada vez que se dispara, y es apropiado que usemos el lenguaje familiar de la física newtoniana para tener en cuenta el cambio en el ímpetu por la acción de una fuerza apropiada. En este caso, la fuerza que acelera al cañón es una fuerza de reacción: el

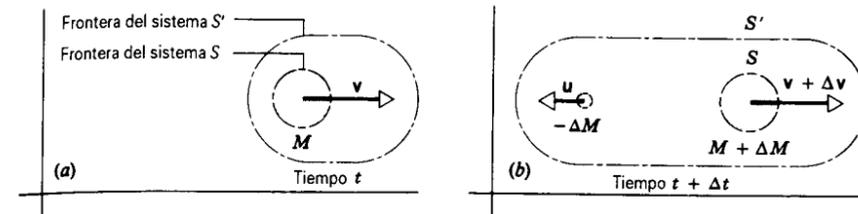


Figura 20 (a) Un sistema S' en el tiempo t consta de una masa M que se mueve a velocidad v . (b) En un tiempo Δt más tarde, la masa original M ha arrojado cierta masa $-\Delta M$. La masa restante $M + \Delta M$, a la cual llamamos subsistema S , se mueve ahora a una velocidad $v + \Delta v$.

cañón, en virtud de la explosión de su carga, empuja contra las balas de cañón que arroja, y la fuerza de reacción (las balas de cañón empujando contra el cañón) hace mover al cañón hacia la izquierda.

Cuando el cañón se dispara repetidamente, la masa total sobre la cureña disminuye según la cantidad de balas de cañón que hayan sido arrojadas. Los métodos del problema muestra 7 no pueden emplearse fácilmente para resolver este problema porque la masa M del objeto que recula es diferente cada vez que el cañón dispara.

En este ejemplo nos referiremos al sistema S , que consta del cañón más la cureña, como un sistema de "masa variable". Por supuesto, el sistema más grande S' que consta del cañón más las balas de cañón disparadas, es un sistema de masa constante y también un sistema de ímpetu constante (en ausencia de una fuerza externa). Sin embargo, el sistema S más pequeño no tiene una masa constante. Aún más, las balas de cañón arrojadas llevan consigo un ímpetu, y existe un flujo neto de ímpetu de S que es el responsable de su aceleración.

El ejemplo anterior da, razonablemente, una buena imagen mental de cómo trabaja un cohete. El combustible se quema y arroja a gran velocidad; los productos de la combustión corresponden a las balas de cañón. El cohete (menos el combustible consumido) experimenta una aceleración que depende de la cantidad de combustible que se consume y de la velocidad con que se arroja.

El objetivo del análisis de sistemas similares al cohete no es el de considerar la cinemática de todo el sistema S' . En cambio, enfocamos nuestra atención a un subsistema particular S , y nos preguntamos cómo se mueve S al redistribuirse la masa dentro del sistema entero S' de modo que cambie la masa dentro del subsistema S . La masa total dentro de S' permanece constante, pero el subsistema particular S que consideramos puede cambiar su estado de movimiento al ganar o al perder masa (e ímpetu).

La figura 20 muestra una vista esquemática de un sistema generalizado. En el tiempo t , el subsistema S tiene una masa M y se mueve a velocidad v en el marco de referencia particular desde el que lo estamos observando. En el tiempo $t + \Delta t$, la masa de S ha cambiado en una cantidad ΔM (una cantidad negativa, en el caso de una masa arrojada) a $M + \Delta M$, mientras que la masa del resto del sistema íntegro S' ha cambiado en una cantidad correspondiente $-\Delta M$. El sistema S se mueve ahora a una velocidad $v + \Delta v$, y la materia arrojada se mueve a una velocidad u , ambas medidas desde nuestro marco de referencia.

Para hacer esta situación lo más general posible, permitimos también una fuerza externa F_{ext} que pueda actuar sobre todo el sistema. Ésta no es la fuerza que impulsa al cohete (la cual es una fuerza interna para el sistema S'), sino que es más bien la

fuerza debida a algún agente externo, quizás la gravedad o el arrastre atmosférico. El ímpetu total de todo el sistema S' es P , y la segunda ley de Newton puede expresarse así:

$$F_{ext} = \frac{dP}{dt}. \quad (37)$$

En el intervalo de tiempo Δt , el cambio de ímpetu ΔP es

$$\Delta P = P_f - P_i \quad (38)$$

donde P_f es el ímpetu final del sistema S' en el tiempo $t + \Delta t$, y P_i es el ímpetu inicial de S' en el tiempo t , están dados por

$$P_i = Mv, \quad (39a)$$

$$P_f = (M + \Delta M)(v + \Delta v) + (-\Delta M)u. \quad (39b)$$

El cambio en el ímpetu de S' es, entonces,

$$\Delta P = P_f - P_i = (M + \Delta M)(v + \Delta v) + (-\Delta M)u - Mv. \quad (40)$$

Reescribiendo la derivada de la ecuación 37 como un límite y sustituyendo esta expresión para ΔP , obtenemos

$$\begin{aligned} F_{ext} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(M + \Delta M)(v + \Delta v) + (-\Delta M)u - Mv}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[M \frac{\Delta v}{\Delta t} + (v - u) \frac{\Delta M}{\Delta t} + \Delta v \frac{\Delta M}{\Delta t} \right] \\ &= M \frac{dv}{dt} + (v - u) \frac{dM}{dt}. \end{aligned} \quad (41)$$

Nótese que, al tomar el límite, el último término dentro de los corchetes cuadrados se anula, porque $\Delta v \rightarrow 0$ según $\Delta t \rightarrow 0$. En la ecuación 41, M es la masa del subsistema S en el tiempo t , y dv/dt es su aceleración cuando arroja masa a la velocidad u (en nuestro marco de referencia) y en una cantidad $|dM/dt|$.

Podemos también expresar la ecuación 41 de una forma ligeramente más general:

$$F_{ext} = \frac{d}{dt} (Mv) - u \frac{dM}{dt}. \quad (42)$$

La ecuación 42 no se parece en absoluto a $F_{ext} = Ma$ o a $F_{ext} = d(Mv)/dt$, que hemos usado previamente para analizar el movimiento de partículas o de sistemas de masa constante. Podemos reducir la ecuación 42 a la forma de partícula de la segunda ley de Newton en dos casos muy especiales solamente: (1) cuando

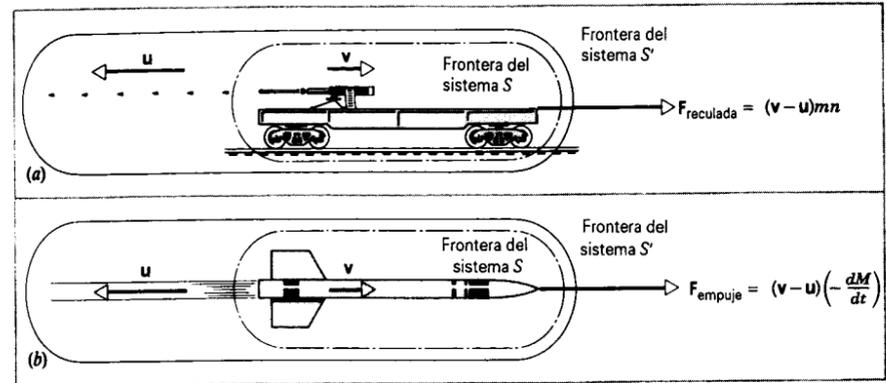


Figura 21 (a) Una ametralladora dispara una ráfaga de balas a razón de n por unidad de tiempo. El ímpetu total del sistema S' permanece constante, pero el subsistema S experimenta una fuerza de reculada que cambia su ímpetu. El cambio de ímpetu en un tiempo dt es exactamente igual al ímpetu opuesto mn u transportado por las balas. (b) Un cohete expulsa un chorro de productos de combustión. El ímpetu total del sistema S' permanece constante, pero el subsistema S experimenta un empuje que cambia su ímpetu. El cambio de ímpetu en un tiempo dt es exactamente igual al ímpetu opuesto u dM transportado por el gas expulsado.

$dM/dt = 0$ de modo que M es una constante, en cuyo caso estamos otra vez discutiendo sistemas de masa constante, o (2) cuando $u = 0$, en cuyo caso estamos viendo al sistema de masa variable desde un marco de referencia muy especial en el cual la materia arrojada está en reposo.

En general, cuando aplicamos $F_{ext} = dP/dt$ al sistema S que gana o pierde masa, debemos tener en cuenta el cambio en el ímpetu de la masa que se gana o se pierde.* Esto es, como lo sugiere la ecuación 42 y la figura 20, debemos considerar al sistema más grande S' , que incluye al sistema S y a la masa adicional. Este enfoque en la dinámica de sistemas de masa variable resalta la importancia de la ley de conservación del ímpetu, y nos da una receta relativamente sencilla para tratar sistemas complicados.

La ecuación 41 ha sido derivada en una forma especial que puede ser adaptada fácilmente al análisis del movimiento de un cohete. La cantidad $u - v$ es v_{rel} , la velocidad de los gases expulsados con relación al cohete. Ésta es una cantidad razonable a introducir, porque la velocidad de los gases expulsados es una característica de diseño fundamental del motor del cohete y no debe expresarse en una forma que dependa de ningún otro marco de referencia que el cohete mismo. En función de v_{rel} , podemos escribir la ecuación 41 en la forma siguiente:

$$M \frac{dv}{dt} = F_{ext} + v_{rel} \frac{dM}{dt} \quad (43)$$

El último término de la ecuación 43 nos da la razón a la cual el ímpetu está siendo transferido al subsistema S o quizás fuera de él. Puede ser interpretada como una fuerza ejercida sobre S por la masa que entra o sale de S . En el caso de un cohete, este

término se llama *empuje*; para hacer al empuje lo más grande posible, los diseñadores de cohetes intentan hacer tanto a v_{rel} (la velocidad de escape) como a $|dM/dt|$ (la razón a la que es arrojada la masa) lo más grande posible.

La ecuación del cohete

Consideremos un cohete en el espacio lejano, donde no está sujeto a fuerza externa alguna. Supongamos, por simplicidad, que el movimiento está confinado a una dimensión; dv/dt define la dirección positiva cuando el cohete acelera y v_{rel} apunta, por lo tanto, en dirección negativa. La ecuación 43 puede expresarse en este caso así:

$$M \frac{dv}{dt} = -v_{rel} \frac{dM}{dt} \quad (44)$$

donde v_{rel} es la magnitud de la velocidad de escape. Nótese que dM/dt es negativa, de modo que el lado derecho de la Ec. 44 es positivo, como lo es el lado izquierdo.

La ecuación 44 es la ecuación fundamental que rige el comportamiento de un cohete. Durante la combustión estable del motor, el empuje (el lado derecho de la Ec. 44) es una constante (pero la aceleración resultante del cohete dv/dt no es una constante porque la masa M cambia mientras el combustible se quema).

Consideremos el cambio de velocidad del cohete que corresponde a la combustión de una cantidad específica de combustible m_b . La velocidad inicial es v_i , y la velocidad final después de la combustión es v_f . Replanteamos la ecuación 44 así:

$$dv = -v_{rel} \frac{dM}{M} \quad (45)$$

La masa total M del cohete es una variable. La masa original del cohete más el combustible es M_0 , y en cualquier tiempo t , la masa remanente M del cohete más la masa m_b del combustible quemado hasta ese momento debe ser M_0 ; así $M = M_0 - m_b$.

* Véase "Force, Momentum Change, and Motion", por Martin S. Tiersten, *American Journal of Physics*, enero de 1969, pág. 82, para una excelente referencia general sobre sistemas de masa fija y variable.

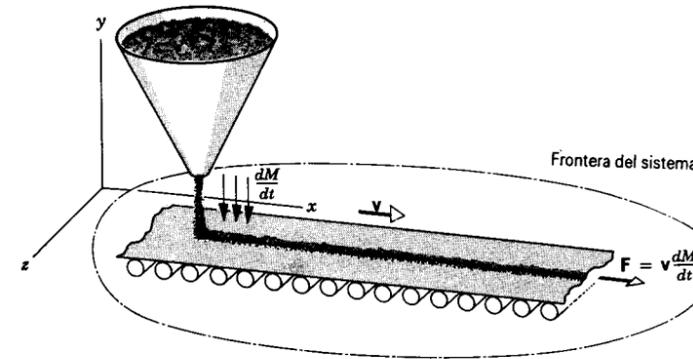


Figura 22 Problema muestra 13. De una tolva cae arena a razón de dM/dt sobre una banda transportadora que se mueve a velocidad constante v en el marco de referencia del laboratorio. La fuerza necesaria para mantener a la banda moviéndose a velocidad constante es v dM/dt . La tolva está en reposo en el marco de referencia del laboratorio.

Integramos la ecuación 45 entre los límites v_i , cuando la masa del cohete es M_0 , y v_f , cuando la masa es $M_0 - m_b$, obteniendo

$$\begin{aligned} \int_{v_i}^{v_f} dv &= -v_{rel} \int_{M_0}^{M_0 - m_b} \frac{dM}{M} \\ v_f - v_i &= -v_{rel} \ln M \Big|_{M_0}^{M_0 - m_b} \\ &= -v_{rel} [\ln (M_0 - m_b) - \ln M_0] \\ &= -v_{rel} \ln \left(\frac{M_0 - m_b}{M_0} \right). \end{aligned} \quad (46)$$

La ecuación 46 da el cambio de velocidad del cohete que resulta de la combustión de una cantidad m_b de combustible.

Suponiendo que el cohete comienza desde el reposo ($v_i = 0$) con una masa inicial M_0 y alcanza una velocidad final v_f en combustión cuando su masa es $M_f = M_0 - m_b$, podemos escribir la ecuación 46 así:

$$\frac{M_f}{M_0} = e^{-v_f/v_{rel}} \quad (47)$$

La analogía entre el cohete y la reculada de un arma se ilustra en la figura 21. En cada caso se conserva el ímpetu de todo el sistema, que consta de la masa expulsada (balas o combustible) más el objeto que expulsa la masa. Cuando centramos nuestra atención en el arma o en el cohete dentro del sistema más grande, vemos que su masa cambia y que existe una fuerza que lo impulsa, una reculada en el caso del arma y un empuje en el caso del cohete. Si contemplamos el sistema desde el marco de referencia en el centro de masa, a medida que el tiempo transcurre hay más masa expulsada, y ha viajado más hacia la izquierda según vemos en la figura 21, lo que significa que el objeto debe viajar a la derecha para que el centro de masa se mantenga fijo.

Problema muestra 12 Un cohete tiene una masa de 13,600 kg una vez lleno con su combustible en la rampa de lanzamiento. Se dispara verticalmente hacia arriba y en la combustión ha consumido y expulsado 9100 kg de combustible. Los gases salen expulsados a razón de 146 kg/s a una velocidad de 1520 m/s, relativa al cohete, suponiendo que ambas cantidades son constantes mientras se quema el combustible. (a) ¿Cuál es el empuje? (b) Si pudiéramos despreciar todas las fuerzas

externas, incluyendo la gravedad y la resistencia del aire, ¿cuál sería la velocidad del cohete durante la combustión?

Solución (a) El empuje F es el último término de la ecuación 43, o sea

$$F = v_{rel} \left| \frac{dM}{dt} \right| = (1520 \text{ m/s})(146 \text{ kg/s}) = 2.22 \times 10^5 \text{ N.}$$

Nótese que inicialmente, cuando los tanques de combustible están llenos, la fuerza neta hacia arriba que actúa sobre el cohete (despreciando la resistencia del aire) es el empuje menos el peso inicial Mg , o sea 88,600 N. En el momento antes de la combustión la fuerza neta hacia arriba es el empuje menos el peso final, o 1.78×10^5 N.

(b) De la ecuación 46, podemos hallar la velocidad durante la combustión:

$$\begin{aligned} v_f &= -v_{rel} \ln \left(\frac{M_0 - m_b}{M_0} \right) \\ &= -(1520 \text{ m/s}) \ln \left(\frac{13,600 \text{ kg} - 9100 \text{ kg}}{13,600 \text{ kg}} \right) = 1680 \text{ m/s.} \end{aligned}$$

Si las fuerzas externas de la gravedad y de la resistencia del aire fueran tomadas en cuenta, la velocidad final sería menor.

Problema muestra 13 De una tolva estacionaria cae arena a razón de dM/dt sobre una banda transportadora que se mueve a velocidad v en el marco de referencia del laboratorio, como en la figura 22. ¿Qué potencia se necesita para mantener a la banda moviéndose a la velocidad v ?

Solución La figura 20 describe esta situación, con el sistema S representando a la banda más la arena acumulada y ΔM representando a la arena adicional que cae sobre la banda. El sistema S' incluye a la banda y a toda la provisión de arena en la tolva. Tomamos como nuestro objeto (sistema S) a la banda (incluida la arena) de masa variable M , y por la ecuación 41 debemos asentar que $dv/dt = 0$, porque la velocidad de la banda es constante, y $u = 0$, porque la arena, al caer, no tiene velocidad horizontal en nuestro marco de referencia. Obtenemos

$$F_{ext} = v \frac{dM}{dt}.$$

En este ejemplo, dM/dt es positiva porque el sistema está ganando masa con el tiempo. De aquí que, como es de esperarse, la fuerza externa necesaria debe apuntar en la dirección en que se mueve la banda. Nótese que la masa de la propia banda no

interviene en el problema, porque hemos supuesto que la banda se mueve a velocidad constante.

La potencia suministrada por la fuerza externa es

$$P_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{v} \frac{dM}{dt} \right) = v^2 \left(\frac{dM}{dt} \right).$$

Puesto que v es una constante, podemos plantear esto como

$$P_{\text{ext}} = \frac{d(Mv^2)}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Mv^2 \right) = 2 \frac{dK}{dt}.$$

Esto nos dice que la potencia externa necesaria para mantener a la banda en movimiento es el doble de la cantidad en que está aumentando la energía cinética del sistema; nótese que no necesitamos considerar la energía cinética de la propia banda porque su velocidad es constante, y, por lo tanto, su energía cinética no cambia.

Está claro que la energía mecánica no se conserva en este caso. Sólo la mitad del trabajo efectuado por el motor que impulsa a la banda aparece como energía mecánica del sistema. ¿A dónde fue la otra mitad? Para responder a esta pregunta, apliquemos la conservación de la energía, ecuación 30, a un elemento pequeño de masa dM que cae sobre la banda. Suponemos que cae desde una altura suficientemente pequeña para que su cambio en energía potencial pueda ser despreciado. En el intervalo de tiempo dt que le toma a dM comenzar a moverse

con la velocidad de la banda, el trabajo efectuado por la fuente externa es $dW = P_{\text{ext}} dt = v^2 dM$. El cambio en la energía cinética de este elemento de masa es $+\frac{1}{2}(dM)v^2$. Aplicando la ecuación 30 nos da, entonces,

$$\Delta E_{\text{int}} = v^2 dM - \frac{1}{2}(dM)v^2 = \frac{1}{2}(dM)v^2.$$

La energía interna del sistema aumenta en la misma cantidad que la energía cinética. Entonces la mitad de la potencia que entra va a la energía cinética de la arena en movimiento, mientras que la otra mitad termina como energía interna de la arena y la banda (resultando, quizás, de la fricción que existe entre la arena y la banda después de que la arena haya caído pero antes de que se mueva a la velocidad de la banda).

Este problema muestra ofrece el ejemplo de una fuerza ejercida con un cambio de masa, siendo la velocidad constante. Es también posible que la velocidad de un sistema de masa variable disminuya como resultado de la masa añadida al sistema, invirtiendo, en efecto, la operación de un cohete.* ■

* Véase, por ejemplo, "The Falling Raindrop: Variations on a Theme of Newton", por K. S. Krane, *American Journal of Physics*, febrero de 1981, pág. 113.)

PREGUNTAS

1. ¿Está el centro de masa de un objeto sólido necesariamente dentro del objeto? Si no, dé un ejemplo.
2. La figura 23 muestra (a) un prisma triangular isósceles y (b) un cono circular recto cuyo diámetro tiene la misma longitud que la base del triángulo. El centro de masa del triángulo está a un tercio arriba de la base, pero el del cono está a sólo un cuarto. ¿Puede usted explicar la diferencia?

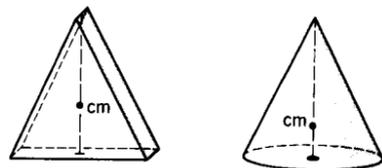


Figura 23 Pregunta 2.

3. ¿Cómo se relaciona el concepto de centro de masa con el concepto de centro geográfico de un país? ¿Con el centro de población de un país? ¿Qué puede usted concluir del hecho de que el centro geográfico difiera del centro de población?
4. ¿Dónde está el centro de masa de la atmósfera de la Tierra?
5. Un aficionado a la escultura decide modelar un pájaro (Fig. 24). Por fortuna, el modelo final puede en realidad mantenerse enhiesto. El modelo está formado de una

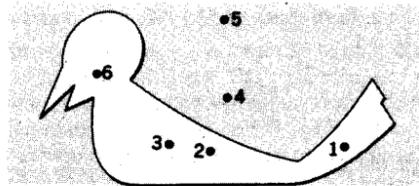


Figura 24 Pregunta 5.

simple lámina gruesa de metal de espesor uniforme. De los puntos mostrados, ¿cuál es más probable que sea el centro de masa?

6. Hay quien sostiene que cuando un saltador de altura experimentado salva la barra, el centro de masa del atleta está realmente *abajo* de la barra. ¿Es esto posible?
7. Una bailarina de ballet que ejecuta un *grand jeté* (gran brinco; véase la Fig. 25) parece flotar horizontalmente en la parte central de su brinco. Demuestre cómo puede la bailarina maniobrar sus piernas durante el brinco de modo que, aunque el centro de masa siga en realidad la trayectoria parabólica esperada, su cabeza se mueva más o menos horizontalmente. (Véase "The Physics of Dance", por Kenneth Laws, *Physics Today*, febrero de 1985, pág. 24.)
8. Un objeto ligero y un objeto pesado tienen energías cinéticas de traslación iguales. ¿Cuál tiene el ímpetu más grande?



Figura 25 Pregunta 7.

9. Un pájaro está en una jaula de alambre que cuelga de una báscula de resorte. ¿Es la lectura de la báscula, cuando el pájaro está volando, mayor, menor, o la misma que cuando el pájaro está quieto sobre la jaula?
10. ¿Puede un bote de vela propulsarse por el aire de un ventilador que esté unido al bote y soplando en las velas? Explique su respuesta.
11. ¿Puede un cuerpo tener energía sin que tenga ímpetu? Explique. ¿Puede un cuerpo tener ímpetu sin que tenga energía? Explíquelo.
12. Un canoero que está en un lago tranquilo puede alcanzar la orilla tirando bruscamente de la cuerda unida a la proa de la canoa. ¿Cómo explicaría usted esto? (En realidad, esto es posible.)
13. ¿Cómo podría una persona que está sentada y en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción salirse de esa superficie?
14. Un hombre está de pie y quieto sobre una gran lámina de hielo resbaladizo; en su mano sostiene un petardo encendido. Arroja el petardo al aire a un cierto ángulo (es decir, no verticalmente). Describa brevemente, pero lo más exacto posible, el movimiento del centro de masa del sistema consistente en hombre y petardo. Conviene describir cada movimiento durante cada uno de los periodos siguientes: (a) después de haber arrojado el petardo, pero antes de que explote; (b) entre la explosión y el primer trozo del petardo que caiga sobre el hielo; (c) entre el primer fragmento que caiga al hielo y el último fragmento al caer, y (d) durante el tiempo en que todos los fragmentos han caído pero ninguno ha llegado al hielo.
15. Justifique que la afirmación siguiente: "La ley de conservación del ímpetu lineal, aplicada a una partícula aislada, es equivalente a la primera ley del movimiento de Newton."
16. Usted arroja un cubo de hielo a una velocidad v dentro de un espacio caliente, con vacío y carente de gravedad. El cubo se funde gradualmente convirtiéndose en líquido y luego hierve para convertirse en vapor de agua. (a) ¿Es el cubo un sistema de partículas en todo momento? (b) Si es

así, ¿es el mismo sistema de partículas? (c) ¿Sufre el movimiento del centro de masa algún cambio abrupto? (d) ¿Cambia el ímpetu lineal total?

17. Una partícula de masa $m = 0$ (un neutrino, posiblemente) transporta un ímpetu. ¿Cómo puede ser esto así a la vista de la ecuación 22, en la cual vemos que el ímpetu es directamente proporcional a la masa?
18. Si sólo una fuerza externa puede cambiar el estado de movimiento del centro de masa de un cuerpo, ¿cómo sucede que la fuerza interna de los frenos puede llevar a un automóvil al reposo?
19. Decimos que un automóvil no es acelerado por fuerzas internas sino más bien por las fuerzas externas que actúan sobre él por la carretera. ¿Por qué necesita el motor un automóvil?
20. ¿Puede el trabajo efectuado por fuerzas internas disminuir la energía cinética de un cuerpo? ... ¿aumentarlo?
21. (a) Si usted efectúa trabajo sobre un sistema, ¿adquiere el sistema necesariamente energía cinética? (b) Si el sistema adquiere energía cinética, ¿significa esto necesariamente que algún agente externo efectuó trabajo sobre él? Dé ejemplos. (Por "energía cinética" nos referimos aquí a la energía cinética media asociada con el movimiento del centro de masa.)
22. En el problema muestra 9 vimos un ejemplo (un patinador) en el que existía energía cinética pero no se efectuaba ningún trabajo externo. Consideremos el caso contrario. Un desarmador se mantiene con fuerza contra una rueda amoladora que está girando. Aquí se efectúa trabajo externo pero la energía cinética del desarmador no cambia. Explique esta aparente contradicción.
23. ¿Puede usted pensar en sistemas de masa variable distintos de los ejemplos dados en el texto?
24. Como ya dijimos en el texto, no podemos usar la ecuación $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d(M\mathbf{v})/dt$ para un sistema de masa variable. Para demostrar esto (a) exprese la ecuación en la forma $(\mathbf{F}_{\text{ext}} - M d\mathbf{v}/dt)/(dM/dt) = \mathbf{v}$ y (b) demuestre que un lado de esta ecuación tiene el mismo valor en todos los marcos inerciales, mientras que el otro lado no lo tiene. De aquí que la ecuación generalmente no pueda ser válida. (c) Demuestre que la ecuación 42 no conduce a tal contradicción.
25. En 1920 un periódico destacado publicó el editorial siguiente acerca de los experimentos pioneros con cohetes de Robert H. Goddard, desechando la idea de que un cohete pudiera funcionar en el vacío: "Ese profesor Goddard, con su 'cátedra' en el Clark College y el favoritismo de la Smithsonian Institution, no conoce la relación de la acción a la reacción, ni tiene idea de la necesidad de poseer algo mejor que un vacío contra el cual reaccionar, cosa que sería absurda. Claro que a todas luces parece carecer del conocimiento que se da diariamente de cajón en cualquier secundaria." ¿Qué está mal en este argumento?
26. La velocidad final de la última fase de un cohete de fases múltiples es mucho mayor que la velocidad final de un cohete de una sola fase de igual masa total e igual dotación de combustible. Explique este hecho.
27. ¿Puede un cohete alcanzar una velocidad mayor que la velocidad de los gases de escape que lo impulsan? Explique por qué o por qué no.

28. ¿Existe algún otro método de propulsión en el espacio exterior que no sean los cohetes? De ser así, ¿de qué se trata, y por qué no se usa?
29. La ecuación 46 sugiere que la velocidad de un cohete puede aumentar sin límite si se quema el suficiente combustible. ¿Es esto razonable? ¿Cuál es el límite de apli-

cabilidad de la ecuación 46? ¿En qué paso, en la derivación de la ecuación 46, introducimos este límite? (Véase "The Equation of Motion for Relativistic Particles and Systems with Variable Rest Mass", por Kalman B. Pomeranz, *American Journal of Physics*, diciembre de 1964, pág. 955.)

PROBLEMAS

Sección 9-1 Sistemas de dos partículas

1. (a) Resuelva la ecuación 4 para x_1 y la ecuación 5 para v_1 , y sustituya ambos resultados junto con la ecuación 3 en la ecuación 2 para obtener

$$m_1^2 k d_1^2 = k u^2 + \mu \left(\frac{du}{dt} \right)^2,$$

donde $u = Mx_2 - Mx_{cm} - m_1L$ y $\mu = m_1m_2/M$. (b) Demuestre que este resultado puede resolverse para $u(t)$ usando las técnicas presentadas en la sección 8-4 para dar

$$u(t) = m_1 d_1 \cos \omega t,$$

donde $\omega = \sqrt{k/\mu}$. (c) Resuelva para $x_1(t)$, $x_2(t)$, $v_1(t)$, y $v_2(t)$. Este problema demuestra que las ecuaciones del centro de masa nos permiten resolver para los movimientos de m_1 y m_2 en la situación mostrada en la figura 1.

Sección 9-2 Sistemas de muchas partículas

2. ¿Dónde está el centro de masa de las tres partículas mostradas en la figura 26?

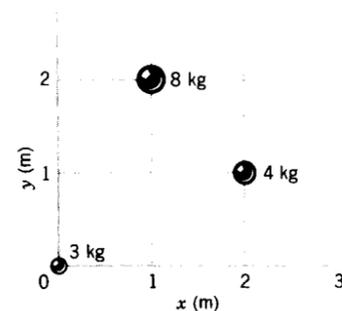


Figura 26 Problema 2.

3. ¿Qué tan lejos está el centro de masa del sistema Tierra-Luna del centro de la Tierra? (Del apéndice C obtenga las masas de la Tierra y de la Luna, y la distancia entre los centros de ellas. Es interesante comparar la respuesta con el radio de la Tierra.)

4. Demuestre que la razón entre las distancias x_1 y x_2 de dos partículas respecto a su centro de masa es la razón inversa de sus masas, esto es, $x_1/x_2 = m_2/m_1$.
5. Un Chrysler con una masa de 2210 kg se está moviendo a lo largo de un tramo recto de carretera a 105 km/h. Es seguido por un Ford de 2080 kg de masa que se mueve a 43.5 km/h. ¿Qué velocidad tiene el centro de masa de los dos carros en movimiento?
6. Dos patinadores, uno con 65 kg de masa y el otro con 42 kg de masa, están de pie en una pista de hielo sosteniendo una pértiga de 9.7 m de longitud y de masa despreciable. Comenzando desde los extremos de la pértiga, los patinadores se jalan a sí mismos a lo largo de la pértiga hasta que se encuentran. ¿Qué distancia recorrerá el patinador de 42 kg?
7. Un hombre de masa m se halla asido a una escalera de cuerda suspendida de un globo de masa M ; véase la figura 27. El globo se halla estático respecto al terreno. (a) Si el hombre comienza a trepar por la escalera a una velocidad v (con respecto a la escalera), ¿en qué dirección y a qué velocidad (respecto a la Tierra) se moverá el globo? (b) ¿Cuál es el estado de movimiento después de que el hombre deja de trepar?
8. Dos partículas P y Q están inicialmente en reposo y separadas por una distancia 1.64 m. P tiene una masa de



Figura 27 Problema 7.

1.43 kg y Q una masa de 4.29 kg. P y Q se atraen entre sí con una constante de fuerza de 1.79×10^{-2} N. No actúan sobre el sistema fuerzas externas. (a) Describa el movimiento del centro de masa. (b) ¿A qué distancia de la posición original de P chocan las partículas?

9. Un cañón y un aprovisionamiento de balas de cañón están dentro de un carro de ferrocarril sellado de longitud L , como se muestra en la figura 28. El cañón dispara hacia la derecha; el carro recula hacia la izquierda. Las balas de cañón permanecen en el carro después de chocar contra la pared más alejada. (a) Después de que hayan sido disparadas todas las balas, ¿cuál es la distancia más grande a la que puede moverse el carro a partir de su posición original? (b) ¿Cuál es la velocidad del carro después de que todas las balas han sido disparadas?

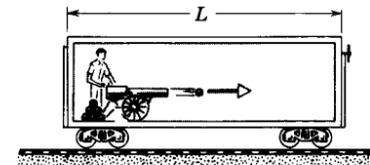


Figura 28 Problema 9.

10. En una molécula de amoníaco (NH_3), los tres átomos de hidrógeno (H) forman un triángulo equilátero, siendo la distancia entre los centros de los átomos 16.28×10^{-11} m, de modo que el centro del triángulo está a 9.40×10^{-11} m de cada átomo de hidrógeno. El átomo de nitrógeno (N) está en la cúspide de la pirámide, estando la base constituida por los tres átomos de hidrógeno (véase la Fig. 29). La distancia nitrógeno-hidrógeno es de 10.14×10^{-11} m y la relación de masa atómica nitrógeno/hidrógeno es 13.9. Localice el centro de masa con relación al átomo de nitrógeno.

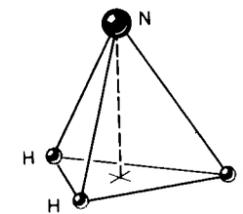


Figura 29 Problema 10.

11. Dos cuerpos, cada uno hecho con juego de pesas, están unidos por un cordón ligero que pasa por una polea ligera, sin fricción, un diámetro de 56.0 mm. Los dos cuerpos están al mismo nivel. Cada uno tiene originalmente una masa de 850 g. (a) Ubique su centro de masa. (b) Se transfieren 34 g de un cuerpo al otro, pero se impide que los cuerpos se muevan. Localice el centro de masa. (c) Ahora los dos cuerpos se dejan caer. Describa el movimiento del centro de masa y determine su aceleración.

12. Se dispara una bala de un arma a una velocidad de salida de 466 m/s, a un ángulo de 57.4° con la horizontal. En la parte más alta de la trayectoria, la bala explota en dos fragmentos de igual masa. Uno de los fragmentos, cuya velocidad inmediatamente después de la explosión es cero, cae verticalmente. ¿A qué distancia del cañón cae el otro fragmento, suponiendo un terreno llano?
13. Una cadena flexible, uniforme, de longitud L , con un peso por unidad de longitud λ , pasa sobre una clavija pequeña, sin fricción; véase la figura 30. Se deja caer desde una posición de reposo de modo que una longitud de cadena x cuelga de un lado, y una longitud $L - x$ cuelga del otro lado. Halle la aceleración a en función de x .

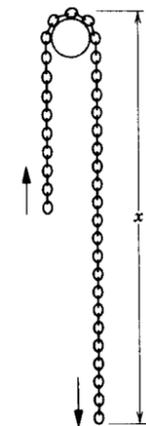


Figura 30 Problema 13.

14. Un perro que pesa 10.8 lb está parado sobre un bote de fondo plano de modo tal que el animal se encuentra a 21.4 ft de la orilla. Camina 8.50 ft por el bote hacia la orilla y luego se detiene. El bote pesa 46.4 lb, y podemos suponer que no existe fricción entre el bote y el agua. ¿A qué distancia está el perro de la orilla al final de este tiempo? (Sugerencia: El centro de masa del bote + el perro no se mueve. ¿Por qué?). También hay orilla hacia la izquierda en la figura 31.
15. Ricardo, que tiene una masa de 78.4 kg, y Judith, quien pesa menos, se divierten al anochecer en un lago dentro de una canoa de 31.6 kg. Cuando la canoa está en reposo en aguas tranquilas, intercambian asientos, los cuales se hallan separados a una distancia de 2.93 m y simétricamente situados con respecto al centro de la canoa. Ricardo observa que la canoa se movió 41.2 cm con relación a un tronco sumergido y calcula la masa de Judith. ¿Cuál es esta masa?
16. Una persona de 84.4 kg está parada en la parte posterior de un trineo de vela que se mueve sobre el hielo; el trineo pesa 425 kg y avanza a 4.16 m/s por el hielo, que puede considerarse sin fricción. Decide caminar hacia el frente del bote, de 18.2 m de longitud y lo hace a una velocidad de 2.08 m/s respecto al bote. ¿Qué distancia recorrió el bote sobre el hielo mientras él estuvo caminando?



Figura 31 Problema 14.

Sección 9-3 Centro de masa de objetos sólidos

17. Tres varillas delgadas, cada una de longitud L , están dispuestas en forma de U invertida, como se muestra en la figura 32. Cada una de las dos varillas que están en los brazos de la U tienen una masa M ; la tercera varilla tiene una masa de $3M$. ¿Dónde está el centro de masa del conjunto?

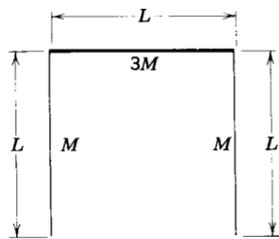


Figura 32 Problema 17.

18. La figura 33 muestra una placa compuesta con dimensiones de $22.0 \text{ cm} \times 13.0 \text{ cm} \times 2.80 \text{ cm}$. La mitad de la placa está hecha de aluminio (densidad = 2.70 g/cm^3) y la mitad de hierro (densidad = 7.85 g/cm^3), como se muestra. ¿Dónde está el centro de masa de la placa?

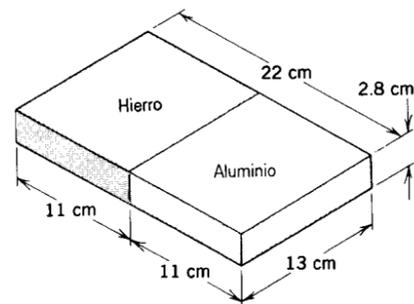


Figura 33 Problema 18.

19. Una caja, abierta por arriba, que tiene la forma de un cubo de 40 cm de lado está construida de lámina de metal. Halle

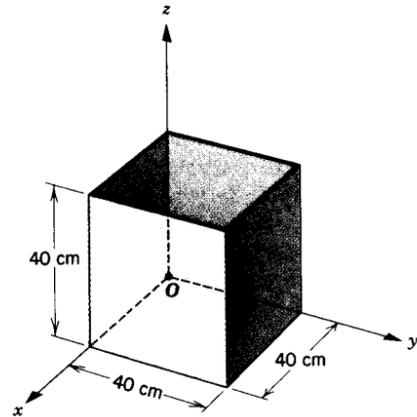


Figura 34 Problema 19.

las coordenadas del centro de masa de la caja respecto al sistema de coordenadas que se muestra en la figura 34.

20. Un tanque de almacenamiento cilíndrico está inicialmente lleno de aerogasolina. El tanque se vacía luego mediante una válvula situada en el fondo; véase la figura 35. (a) Describa cualitativamente el movimiento del centro de masa del tanque y del contenido restante mientras se extrae la gasolina. (b) ¿Cuál es la profundidad x a la cual está lleno el tanque cuando el centro de masa del tanque y del contenido restante alcanza su punto más bajo? Expresar la respuesta en términos de H , la altura del tanque; M , su masa, y m , la masa de la gasolina que cabe en él.

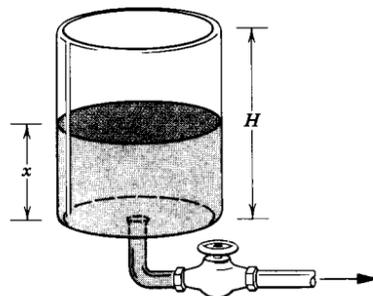


Figura 35 Problema 20.

21. Halle el centro de masa de una placa semicircular homogénea, siendo R el radio del círculo.

Sección 9-4 Ímpetu lineal de una partícula

22. ¿A qué velocidad debe avanzar un Volkswagen de 816 kg (a) para tener el mismo ímpetu que un Cadillac de 2650 kg que va a 16.0 km/h y (b) para tener la misma energía cinética? (c) Haga los mismos cálculos acerca de un camión de 9080 kg en lugar del Cadillac.
23. Un camión de 2000 kg que viaja hacia el norte a razón de 40.0 km/h da la vuelta hacia el este y acelera hasta los

50.0 km/h . (a) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética del camión? (b) ¿Cuál es la magnitud y la dirección del cambio de ímpetu del camión?

24. Un objeto de 4.88 kg a una velocidad de 31.4 m/s golpea una placa de acero a un ángulo de 42.0° y rebota a igual velocidad y ángulo (Fig. 36). ¿Cuál es el cambio (magnitud y dirección) del ímpetu lineal del objeto?

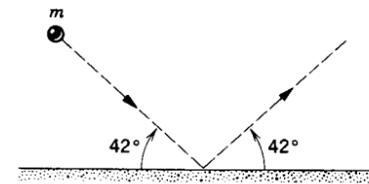


Figura 36 Problema 24.

25. Una pelota de 52.4 g es arrojada desde el suelo al aire, a una velocidad inicial de 16.3 m/s y a un ángulo de 27.4° sobre la horizontal. (a) ¿Cuáles son los valores de la energía cinética de la pelota inicialmente y en el momento antes de que toque el suelo? (b) Halle los valores correspondientes del ímpetu (magnitud y dirección) y del cambio de ímpetu. (c) Demuestre que el cambio de ímpetu es igual al peso de la pelota multiplicado por el tiempo de vuelo, y de allí halle el tiempo de vuelo.
26. Una partícula de masa m tiene un ímpetu lineal p igual a mc . ¿Cuál es su velocidad en función de c , la velocidad de la luz?
27. Demuestre que la ecuación 23 se reduce a la ecuación 21 para velocidades $v \ll c$. Sugerencia: Demuestre que la ecuación 23 puede expresarse así:

$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right).$$

28. Un electrón tiene una velocidad de $0.990c$. (a) Halle su ímpetu lineal, en $\text{kg} \cdot \text{m/s}$. (b) Expresar este ímpetu en las unidades MeV/c .

Sección 9-6 Conservación del ímpetu lineal

29. Una persona de 195 lb que está de pie sobre una superficie de fricción despreciable patea hacia adelante una piedra de 0.158 lb que está a sus pies de modo que ésta adquiere una velocidad de 12.7 ft/s . ¿Qué velocidad adquiere la persona como resultado?
30. Un hombre de 75.2 kg está subido a un carro de 38.6 kg que está en marcha a una velocidad de 2.33 m/s . El hombre salta del carro de modo que toca el suelo a una velocidad horizontal de cero. Halle el cambio resultante en la velocidad del carro.
31. Una plataforma de ferrocarril de peso W puede rodar sin fricción a lo largo de una vía horizontal recta. Inicialmente un hombre de peso w está parado sobre la plataforma que avanza hacia la derecha a velocidad v_0 . ¿Cuál es el cambio en la velocidad de la plataforma si el hombre corre hacia

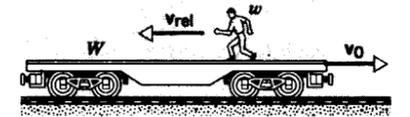


Figura 37 Problema 31.

la izquierda (Fig. 37), de modo que su velocidad con relación a la plataforma es de v_{rel} en el momento antes de que salte hacia afuera en el extremo izquierdo?

32. El trineo de un cohete con una masa de 2870 kg se mueve a razón de 252 m/s sobre unos rieles. En cierto punto, un canjilón del trineo se hunde en un depósito de agua situado entre los rieles y saca agua para echarla dentro de un tanque vacío del trineo. Determine la velocidad del trineo después de que el tanque se ha llenado con 917 kg de agua.
33. La ametralladora especial de un guardabosque dispara al minuto 220 balas de hule de 12.6 g de peso a una velocidad de salida de 975 m/s . ¿Cuántas balas debe disparar contra un animal de 84.7 kg que carga hacia el guardabosque a 3.87 m/s con objeto de detener al animal en su marcha? (Suponga que las balas viajan horizontalmente y caen al suelo después de dar en el blanco.)
34. Un vehículo espacial viaja a 3860 km/h con respecto a la Tierra cuando el motor vacío del cohete se desprende y es enviado de regreso a una velocidad de 125 km/h con respecto al módulo de mando. La masa del motor es el cuádruple de la masa del módulo. ¿Cuál es la velocidad del módulo de mando después de la separación?
35. La última fase de un cohete viaja a una velocidad de 7600 m/s . Esta última fase está hecha de dos partes acopladas entre sí, que comprenden, una caja del cohete con una masa de 290.0 kg y una cápsula de carga útil con una masa de 150.0 kg . Cuando se sueltan las grapas que unen a las dos partes, un resorte comprimido hace que éstas se separen a una velocidad relativa de 910.0 m/s . (a) ¿Cuáles son las velocidades de las dos partes después de que se han separado? Suponga que todas las velocidades son a lo largo de la misma línea. (b) Halle la energía cinética total de las dos partes antes y después de haberse separado y explique la diferencia, si la hay.

36. Una vasija en reposo explota, rompiéndose en tres partes. Dos partes, una con el doble de masa de la otra, se desprenden, de modo que una es perpendicular a la otra, a la misma velocidad de 31.4 m/s . La tercera parte tiene el triple de masa de la parte más liviana. Halle la magnitud y la dirección de su velocidad inmediatamente después de la explosión. (Especifique la dirección dando el ángulo desde la línea de recorrido de la parte menos pesada.)
37. Un núcleo radiactivo, inicialmente en reposo, se desintegra emitiendo un electrón y un neutrino en ángulos rectos entre sí. El ímpetu del electrón es de $1.2 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ y el del neutrino es de $6.4 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. (a) Halle la dirección y la magnitud del ímpetu del núcleo al regular. (b) La masa del núcleo residual es de $5.8 \times 10^{-26} \text{ kg}$. ¿Cuál es su energía cinética de reculada? El neutrino es una de las partículas fundamentales de la naturaleza.

38. Un carro-plataforma de ferrocarril de 1930 kg, que puede moverse sobre los rieles virtualmente sin fricción, está detenido sin movimiento cerca de una plataforma de la estación. Un jugador de fútbol de 108 kg corre a lo largo de la plataforma paralelamente a las vías a razón de 9.74 m/s. El jugador salta sobre la parte trasera del carro-plataforma después de que el jugador está a bordo y en reposo sobre él? (a) ¿Cuál es la velocidad del carro-plataforma después de que el jugador está a bordo y en reposo sobre él? (b) Ahora el jugador comienza a caminar, a razón de 0.520 m/s con relación al carro-plataforma, hacia el frente del carro. ¿Cuál es la velocidad del carro-plataforma al caminar el jugador?
39. Una bala de 3.54 g se dispara horizontalmente contra dos bloques que descansan sobre una mesa sin fricción, como se muestra en la figura 38a. La bala atraviesa el primer bloque, que tiene una masa de 1.22 kg y se empotra en el segundo, que tiene una masa de 1.78 kg. Al hacerlo, se imprimen en los bloques velocidades de 0.630 m/s y 1.48 m/s, respectivamente, como se muestra en la figura 38b. Despreciando la masa extraída del primer bloque por la bala, halle (a) la velocidad de la bala inmediatamente después de salir del primer bloque y (b) la velocidad original de la bala.

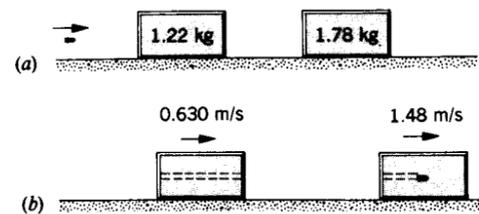


Figura 38 Problema 39.

40. Un cuerpo de 8.0 kg de masa avanza a 2.0 m/s sin la influencia de fuerza externa alguna. En cierto instante ocurre una explosión interna, que divide al cuerpo en dos trozos de 4.0 kg de masa cada uno; la explosión transmite al sistema de dos trozos una energía cinética de traslación de 16 J. Ninguno de los trozos abandona la línea de movimiento original. Determine la velocidad y la dirección del movimiento de cada uno de los trozos después de la explosión.
41. Supóngase que el carro del problema 31 está inicialmente en reposo y sostiene a n personas de peso w cada una. Si cada persona corre sucesivamente a una velocidad relativa v_{rel} y salta desde el extremo del carro, ¿imprimen en el carro una velocidad mayor que si todos corrieran y saltaran al mismo tiempo?
42. Un cañón de 1400 kg que dispara un proyectil de 70.0 kg a una velocidad de salida de 556 m/s se halla fijo a un ángulo de elevación de 39.0° sobre la horizontal. El cañón está montado sobre rieles sin fricción, con el fin de que pueda recular libremente. (a) ¿Cuál es la velocidad del proyectil respecto a la Tierra? (b) ¿A qué ángulo con respecto al terreno es lanzado el proyectil? (Sugerencia:

La componente horizontal del ímpetu del sistema permanece sin cambio al disparar el arma.)

43. Un bloque de masa m reposa sobre una cuña de masa M la cual, a su vez, descansa sobre una mesa horizontal, como se muestra en la Fig. 39. Todas las superficies carecen de fricción. Si el sistema parte del reposo estando el punto P del bloque a una distancia h sobre la mesa, halle la velocidad de la cuña en el instante en que el punto P toca la mesa.

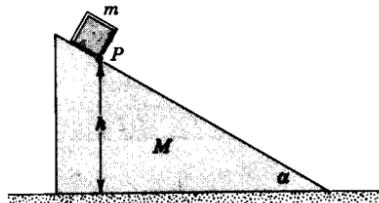


Figura 39 Problema 43.

Sección 9-7 Trabajo y energía en un sistema de partículas

44. Un automóvil con pasajeros tiene un peso de 3680 lb (= 16,400 N) y se mueve a 70.0 mi/h (= 113 km/h) cuando el conductor frena hasta el alto. La carretera ejerce una fuerza de 1850 lb (= 8230 N) sobre las ruedas y éstas no patinan. Calcule la distancia a la que se detiene.
45. Usted se agacha desde una posición erecta, bajando su centro de masa 18.0 cm durante el proceso. Luego salta verticalmente en el aire. La fuerza que el suelo ejerce sobre usted cuando salta es el triple de su peso. ¿Cuál es su velocidad hacia arriba cuando después de la posición erecta se separa del suelo?
46. Una mujer de 55.0 kg brinca verticalmente en el aire desde una posición en cuclillas en que su centro de masa está a 40.0 cm sobre el suelo. Cuando sus pies dejan el suelo su centro de masa está a 90.0 cm sobre el suelo y se eleva a 120 cm cuando alcanza la parte más alta de su brinco. (a) ¿Qué fuerza hacia arriba, supuesta constante, ejerce el suelo sobre ella? (b) ¿Qué velocidad máxima alcanza?
47. Un jugador de hockey sobre hielo, de 116 kg, patina a razón de 3.24 m/s hacia un barandal situado al extremo de la pista y se detiene asiendo el barandal con los brazos extendidos. Durante este proceso de detención su centro de masa se mueve 34.0 cm hacia el barandal. (a) Halle la fuerza promedio que debe ejercer sobre el barandal. (b) ¿Cuánta energía interna pierde?
48. La National Transportation Safety Board (Oficina Nacional para la Seguridad en el Transporte) está probando la eficiencia en el choque de un auto nuevo. El vehículo de 2340 kg se dirige a 12.6 km/h contra un parapeto. Durante el impacto, el centro de masa del auto se mueve hacia adelante 64.0 cm; el parapeto se comprime 8.30 cm. Desprecie la fricción entre el auto y la carretera. (a) Halle la fuerza, supuesta constante, ejercida por el parapeto sobre el auto. (b) ¿En cuánto aumenta la energía interna del auto?

49. Midamos la energía total de un sistema de N partículas en un marco de referencia arbitrario, de modo que $K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$. En el marco de referencia del centro de masa, las velocidades son $v_i' = v_i - v_{cm}$, donde v_{cm} es la velocidad del centro de masa con relación al marco de referencia original. Recordando que $v_i^2 = v_i \cdot v_i$, demuestre que la energía cinética puede expresarse así:

$$K = K_{int} + K_{cm}$$

donde $K_{int} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ y $K_{cm} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2$. Esto demuestra que la energía cinética de un sistema de partículas puede dividirse en un término interno y un término del centro de masa, como apuntábamos en la sección 9-7. La energía cinética interna se mide en un marco de referencia en el cual el centro de masa está en reposo; por ejemplo, los movimientos al azar de las moléculas de gas en un recipiente en reposo son responsables de su energía cinética de traslación interna.

Sección 9-8 Sistemas de masa variable

50. Un cohete en reposo en el espacio, donde no existe virtualmente gravedad, tiene una masa de 2.55×10^5 kg, de los cuales 1.81×10^5 kg son de combustible. El motor consume combustible a razón de 480 kg/s, y la velocidad de eyección es de 3.27 km/s. El motor se enciende durante 250 s. (a) Halle el empuje del motor del cohete. (b) ¿Cuál es la masa del cohete después de la combustión del motor? (c) ¿Cuál es la velocidad final alcanzada?
51. Consideremos un cohete en reposo en el espacio vacío. ¿Cuál debe ser la razón de masa (razón de la masa inicial a la masa final) con objeto de que, después de haberse encendido el motor, la velocidad del cohete sea (a) igual a la velocidad de los gases expulsados y (b) igual al doble de la velocidad de los gases expulsados?
52. Durante una misión lunar es necesario hacer una corrección a medio camino de 22.6 m/s en la velocidad de la nave espacial, la cual se mueve a razón de 388 m/s. La velocidad de los gases de escape del motor del cohete es de 1230 m/s. ¿Qué fracción de la masa inicial de la nave espacial debe ser lanzada como gases de escape?
53. Un cohete de 1.11×10^5 kg de masa total, de los cuales 8.70×10^4 kg son de combustible, va a ser disparado verticalmente. El combustible se quemará en una cantidad constante de 820 kg/s. Con relación al cohete, ¿cuál es la velocidad mínima de los gases de escape que permite el ascenso en el disparo?
54. Un tobogán de 5.4 kg que transporta 35 kg de arena se desliza desde el reposo por una pendiente helada de 93 m de longitud, inclinada a 26° abajo de la horizontal. La arena se fuga de la parte trasera del tobogán a razón de 2.3 kg/s. ¿Cuánto tiempo le tomará al tobogán alcanzar el fondo de la pendiente?
55. Para mantener en movimiento una banda transportadora cuando transporta equipaje se requiere una fuerza de impulsión mayor que con la banda vacía. ¿Qué fuerza de impulsión adicional se necesita si la banda se mueve a una velocidad constante de 1.5 m/s y la tasa a la cual se coloca el equipaje en un extremo de la banda y se retira en el otro

extremo es de 20 kg/s? Supóngase que el equipaje se deja caer verticalmente sobre la banda; quienes retiran el equipaje lo sujetan y lo llevan al reposo con relación a ellos mismos antes de levantarlo de la banda.

56. Un carro de carga, abierto en la parte superior, que pesa 9.75 tons métricas, corre a lo largo de una vía nivelada con fricción despreciable a razón de 1.36 m/s cuando comienza a llover fuertemente. Las gotas de lluvia caen verticalmente con respecto al suelo. ¿Cuál es la velocidad del carro cuando ha reunido 0.50 tons métricas de lluvia? ¿Qué supuestos, en caso de haber alguno, debe usted asumir para dar su respuesta?
57. Un cohete de 5860 kg se prepara para el disparo vertical. La velocidad de los gases de escape es de 1.17 km/s. ¿Cuánto gas por segundo deberá ser expelido para proporcionar el empuje necesario (a) para superar el peso del cohete y (b) para darle al cohete una aceleración inicial hacia arriba de 18.3 m/s^2 ? Nótese que, al contrario de la situación descrita en el problema muestra 12, la gravedad está presente aquí como una fuerza externa.
58. Dos barcasas largas avanzan en la misma dirección en aguas tranquilas, una a velocidad de 9.65 km/h y la otra a 21.2 km/h. Cuando están una junto a la otra, se traspalea carbón desde la más lenta a la más rápida a razón de 925 kg/min; véase la figura 40. ¿Cuánta fuerza adicional deberá abastecerse por los motores que impulsan a cada barcaza si ninguna va a cambiar su velocidad? Supóngase que el traspaleo se hace siempre perfectamente hacia el lado y que las fuerzas de fricción entre las barcasas y el agua no dependen del peso de las barcasas.

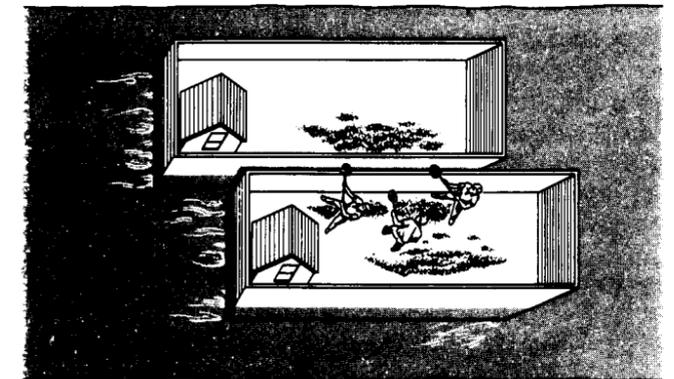


Figura 40 Problema 58.

59. Un avión de propulsión a chorro vuela a 184 m/s (= 604 ft/s). El motor absorbe 68.2 m^3 (= 2410 ft³) de aire, que representa una masa de 70.2 kg (= 4.81 slugs) por segundo. El aire se emplea para quemar 2.92 kg (= 0.200 slug) de combustible por segundo. La energía se emplea para comprimir los productos de combustión y expulsarlos en la parte posterior del motor a 497 m/s (= 1630 ft/s) en relación al avión. Halle (a) el empuje del motor a propulsión y (b) la potencia desarrollada (en hp).
60. Un cordón flexible, inextensible, de longitud L está arrojado en un tubo liso, al cual está bien aparejado. El tubo

contiene una curva en ángulo recto y está colocado en el plano vertical de modo que un brazo es vertical y el otro horizontal. Desde el comienzo, en $t = 0$, una longitud y_0 del cordón cuelga suspendida del brazo vertical. El cordón se suelta y se desliza a través del tubo, de modo que en cualquier tiempo t posterior, se mueve a una velocidad dy/dt , donde $y(t)$ es la longitud del cordón que está entonces colgando verticalmente. (a) Explique en función del

problema de masa variable, $v_{rel} = 0$, de modo que la ecuación del movimiento tiene la forma $m dv/dt = F_{ext}$. (b) Demuestre que la ecuación específica del movimiento es $d^2y/dt^2 = gy$. (c) Demuestre que la conservación de la energía mecánica conduce a $(dy/dt)^2 - gy^2 = a$ constante, y que esto es consistente con (b). (d) Demuestre que $y = (y_0/2)(e^{\sqrt{g/L}t} + e^{-\sqrt{g/L}t})$ es una solución a la ecuación del movimiento [(sustituyendo en (b))] y explique la solución.

CAPÍTULO 10

COLISIONES

Una de las aplicaciones principales de la conservación del ímpetu lineal se encuentra en el análisis de las colisiones entre objetos. Sin importar el tamaño de los objetos, se traten éstos de partículas elementales o de galaxias, y sin importar tampoco qué fuerzas se hallen implicadas, desde la más fuerte (la fuerza nuclear) a la más débil (la gravedad), nos regimos por la ley de la conservación del ímpetu lineal, ley que nos permite el estudio de estos procesos.

En este capítulo expondremos cómo pueden analizarse los procesos de colisión mediante el uso de las leyes de la conservación de la energía y del ímpetu, dando ejemplos tomados del campo de la física subatómica para explicar cómo se obtiene la información fundamental respecto al mundo físico a partir del estudio de los resultados de las diversas clases de colisiones.

10-1 ¿QUÉ ES COLISIÓN?

En la colisión, una fuerza relativamente grande actúa sobre cada partícula que interviene en el choque durante un tiempo relativamente corto. La idea básica de colisión consiste en que el movimiento de las partículas que colisionan (o cuando menos de una de ellas) cambia de manera brusca, y que podemos hacer una separación relativamente clara de los tiempos de “antes de la colisión” y de los de “después de la colisión”.

Cuando un bate de béisbol golpea la bola, por ejemplo, el comienzo y el final de la colisión pueden determinarse con bastante precisión. El bate está en contacto con la bola durante un intervalo bastante corto en comparación con el tiempo durante el cual observamos a la bola. Durante la colisión el bate ejerce una fuerza grande sobre la bola (Fig. 1). Esta fuerza varía con el tiempo de modo complejo, el cual podríamos medir sólo con gran dificultad. Tanto la bola como el bate se deforman en la colisión. Las fuerzas que actúan durante un tiempo corto en comparación con el tiempo de observación del sistema se denominan fuerzas *impulsivas*.

Cuando una partícula alfa (el núcleo del ^4He) colisiona con otro núcleo (Fig. 2), la fuerza que actúa entre ellos puede ser la bien conocida fuerza electrostática de repulsión asociada con las cargas de las partículas. Las partículas pueden no llegar a tocarse en realidad, pero

podemos seguir hablando de colisión, puesto que una fuerza relativamente grande, que actúa durante un tiempo corto en comparación con el tiempo en que la partícula alfa está en observación, tiene un efecto sustancial en el movimiento de la partícula alfa.

Podemos incluso hablar de la colisión entre dos galaxias (Fig. 3), si estamos preparados para observarlas durante una escala de tiempo del orden de millones o miles de millones de años. (Pero una alternativa más viable es, desde luego, ¡acortar este lapso de tiempo por medio de un modelo de computadora!)



Figura 1 Fotografía a alta velocidad de un bate al chocar contra una bola de béisbol. Nótese la deformación de la bola, que indica la gran fuerza impulsiva ejercida por el bate.

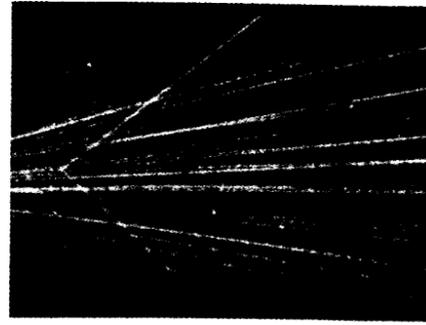


Figura 2 Una partícula alfa colisiona con un núcleo de helio en una cámara de niebla. La mayoría de las partículas que inciden (procedentes de la izquierda) la atraviesan sin chocar.



Figura 3 Colisión de dos galaxias.

Las colisiones entre partículas elementales proporcionan la principal fuente de información de su estructura interna. Cuando dos partículas colisionan a energía elevada, los productos de la colisión suelen ser muy diferentes a las partículas originales (Fig. 4). A veces, estas colisiones provocan cientos de partículas producto, cuya masa total puede ser bastante mayor que las masas de las partículas en colisión (la energía cinética de las partículas incidentes se convierte en energía en reposo en la colisión). Podemos reconstruir el suceso original al estudiar las trayectorias de las partículas salientes y aplicar las leyes fundamentales de la conservación.

En una escala diferente, quienes estudian los accidentes de tránsito tratan también de reconstruir los choques. A partir de las trayectorias y de los patrones de impacto de los vehículos que chocan entre sí (Fig. 5), se pueden deducir a menudo detalles tan importantes como la velocidad y la dirección del movimiento de los dos vehículos antes del choque.

Otra clase de colisión es la que sucede entre una sonda espacial y un planeta, colisión a la que se le llama "efecto de honda"; en ésta, la velocidad y la dirección de la sonda espacial pueden ser alteradas por un "encuentro cercano" con un planeta (en movimiento). La sonda no toca en

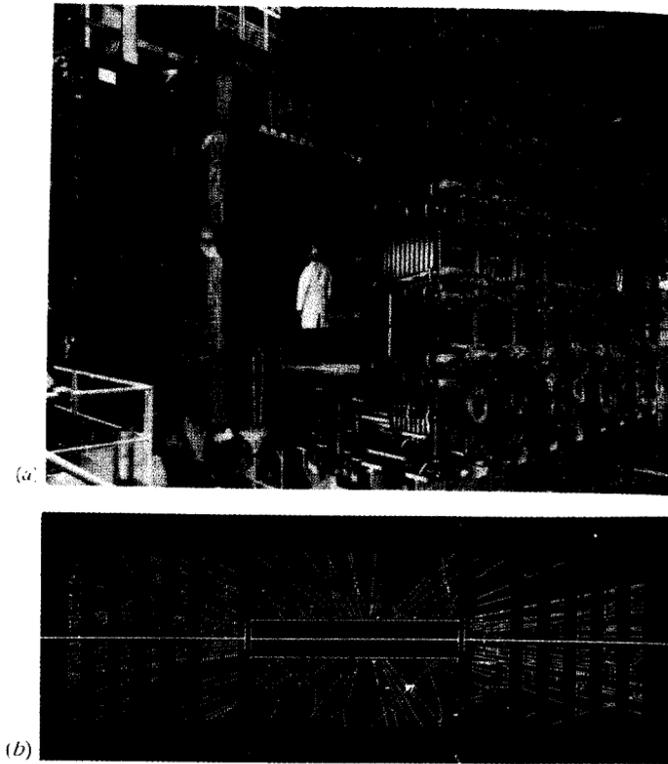


Figura 4 (a) El detector masivo UA1 utilizado en el aparato colisionador protón-protón de CERN, la instalación para investigaciones de la física de la partícula cerca de Ginebra, Suiza. (b) Una reconstrucción por computadora de las trayectorias de las partículas producidas en una colisión protón-protón. Tales reconstrucciones fueron utilizadas en 1983 para comprobar la existencia de las partículas llamadas W y Z, que confirmaron una teoría que trata a la fuerza electromagnética y a la fuerza nuclear débil como aspectos diferentes de una sola fuerza más básica.

realidad al planeta, sino que entra fuertemente bajo su influencia gravitatoria durante un tiempo muy corto en comparación con la duración del viaje de la sonda espacial. Así pues, estamos justificados al llamar "colisiones" a tales encuentros.

10-2 IMPULSO E ÍMPETU

Al estudiar las colisiones en este capítulo, nuestro objetivo es aprender lo que podamos acerca de los movimientos finales de las partículas en colisión a partir de los principios de conservación del ímpetu y de la energía, dados los movimientos iniciales de las partículas en colisión y suponiendo que no sabemos nada acerca de las fuerzas que actúan durante el choque.

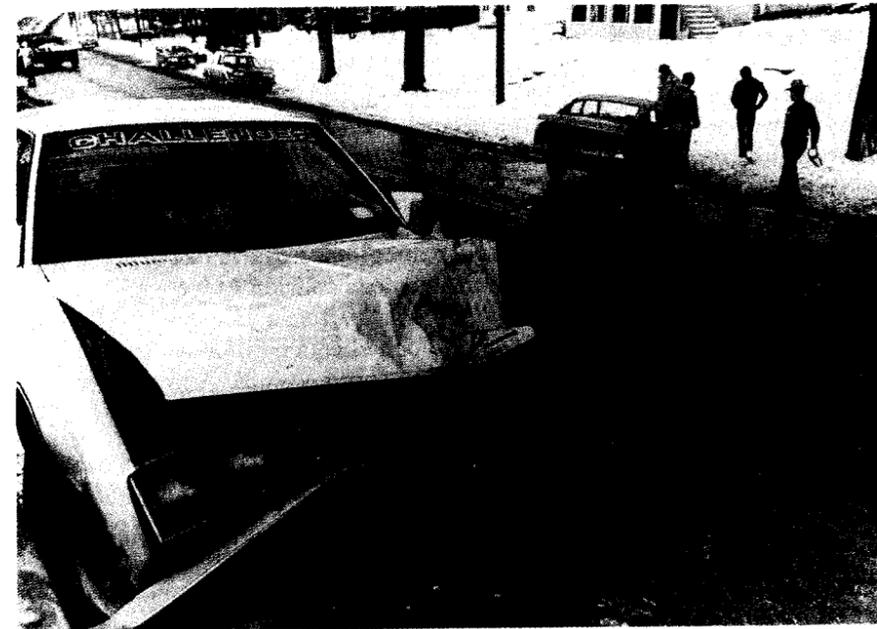


Figura 5 Un choque entre dos automóviles. Gran parte de la energía cinética incidente se convierte en energía de deformación de los dos automóviles. Los expertos en la reconstrucción del accidente utilizan la conservación del ímpetu para calcular las velocidades antes del choque.

UNIVERSIDAD DE LA REPUBLICA
FACULTAD DE INGENIERIA
DEPARTAMENTO DE
DOCUMENTACION Y BIBLIOTECA
MONTEVIDEO - URUGUAY

Supongamos que la figura 6 muestra la magnitud de la fuerza neta ejercida en un cuerpo durante una colisión. La colisión comienza en el tiempo t_i y termina en el tiempo t_f , siendo la fuerza nula antes y después de la colisión. Según la segunda ley de Newton en la forma $F = dp/dt$ podemos escribir el cambio del ímpetu dp de una partícula en un tiempo dt durante el que actúe sobre él una fuerza F en la forma:

$$dp = F dt.$$

Podemos hallar el cambio del ímpetu del cuerpo durante una colisión al integrar sobre el tiempo de colisión, esto es, entre las condiciones iniciales (el ímpetu p_i en el tiempo t_i) y las condiciones finales (el ímpetu p_f en el tiempo t_f):

$$\int_{p_i}^{p_f} dp = \int_{t_i}^{t_f} F dt. \quad (1)$$

El lado izquierdo de la ecuación 1 es precisamente el cambio del ímpetu, $p_f - p_i$. El lado derecho, que depende tanto de la intensidad de la fuerza como de su duración, se llama *impulso J* de la fuerza:

$$J = \int_{t_i}^{t_f} F dt, \quad (2)$$

y de la ecuación 1 se deduce que

$$J = p_f - p_i. \quad (3)$$

La ecuación 3 es el enunciado matemático del *teorema impulso-ímpetu*:

El impulso de la fuerza neta que actúa sobre una partícula durante un intervalo de tiempo determinado es igual al cambio en el ímpetu de la partícula durante ese intervalo.

Tanto el impulso como el ímpetu son vectores y tienen las mismas unidades y dimensiones.

Aunque empleamos la ecuación 3 en este capítulo sólo en situaciones que impliquen fuerzas impulsivas (esto es, aquéllas de corta duración en comparación con el tiempo de observación), tal limitación no es parte de esa ecuación. La ecuación 3 es tan general como la segunda ley de Newton, de la cual se deriva. Por ejemplo, podríamos usar

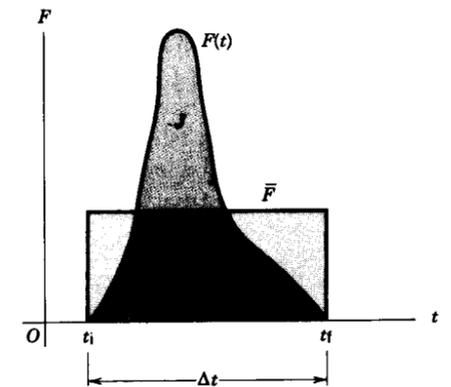


Figura 6 Una fuerza impulsiva $F(t)$ varía de una manera arbitraria con el tiempo durante una colisión que va desde t_i hasta t_f . El área bajo la curva $F(t)$ es el impulso J , y el rectángulo limitado por la fuerza promedio \bar{F} tiene un área igual.

la ecuación 3 para hallar el ímpetu adquirido por un cuerpo que cae en la gravedad de la Tierra.

El teorema impulso-ímpetu es muy similar al teorema trabajo-energía que derivamos en el capítulo 7. Ambos rigen para partículas aisladas y ambos se derivan directamente de la segunda ley de Newton. El trabajo implica una integral de la fuerza neta en cuanto a la posición, mientras que el impulso implica la integral de la fuerza neta en cuanto al tiempo. El teorema trabajo-energía es una ecuación escalar que trata del cambio en la energía cinética de la partícula, mientras que el teorema impulso-ímpetu es una ecuación vectorial que trata del cambio en el ímpetu de la partícula.

Se supone que la fuerza impulsiva cuya magnitud se representa en la figura 6 tiene una dirección constante. La magnitud del impulso de esta fuerza está representada por el área bajo la curva $F(t)$. Podemos representar esa misma área por el rectángulo de la figura 6 de anchura Δt y altura \bar{F} , donde \bar{F} es la magnitud de la fuerza promedio que actúa durante el intervalo Δt . Entonces

$$J = \bar{F} \Delta t. \quad (4)$$

En una colisión como la de la bola y el bate de la figura 1 es difícil medir a $F(t)$ directamente, pero podemos estimar Δt (quizás unos cuantos milisegundos) y obtener un valor razonable para \bar{F} basado en el impulso calculado de acuerdo con la ecuación 3 a partir del cambio en el ímpetu de la bola (véase el problema muestra 1).

10-3 CONSERVACIÓN DEL ÍMPETU DURANTE LAS COLISIONES

Consideremos ahora una colisión entre dos partículas tales como las de masas m_1 y m_2 que se muestran en la figura 7. Durante la breve colisión estas partículas ejercen fuerzas grandes entre sí. En cualquier instante F_{12} es la fuerza ejercida sobre la partícula 1 por la partícula 2 y F_{21} es la fuerza ejercida sobre la partícula 2 por la partícula 1. Según la tercera ley de Newton estas fuerzas son iguales en magnitud pero se oponen directamente.

El cambio en ímpetu de la partícula 1 que resulta de la colisión es

$$\Delta p_1 = \int_{t_i}^{t_f} F_{12} dt = \bar{F}_{12} \Delta t \quad (5)$$

en la cual \bar{F}_{12} es el valor promedio de la fuerza F_{12} durante el intervalo de tiempo de la colisión $\Delta t = t_f - t_i$.

El cambio en el ímpetu de la partícula 2 que resulta de la colisión es

$$\Delta p_2 = \int_{t_i}^{t_f} F_{21} dt = \bar{F}_{21} \Delta t \quad (6)$$



Figura 7 Dos partículas de masas m_1 y m_2 chocan y experimentan fuerzas iguales y opuestas.

en la cual \bar{F}_{21} es el valor promedio de la fuerza F_{21} durante el intervalo de tiempo de la colisión $\Delta t = t_f - t_i$.

Si no actúa sobre la partícula ninguna otra fuerza, entonces Δp_1 y Δp_2 dan el cambio total del ímpetu para cada partícula. Sin embargo, hemos visto que en cada instante $F_{12} = -F_{21}$, de modo que $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$, y por lo tanto

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2. \quad (7)$$

Si consideramos a las dos partículas como un sistema aislado, el ímpetu total del sistema es

$$P = p_1 + p_2, \quad (8)$$

y el cambio total en el ímpetu del sistema como resultado de la colisión es cero; esto es,

$$\Delta P = \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0. \quad (9)$$

De aquí que, si no existen fuerzas externas el ímpetu total del sistema de dos partículas no cambia por la colisión. Esta es simplemente la ley de la conservación del ímpetu lineal (véase la sección 9-6) aplicada a este sistema de dos partículas. Las fuerzas impulsivas que actúan durante la colisión son fuerzas internas que no tienen efecto sobre el ímpetu total del sistema.

Hemos definido una colisión como una interacción que ocurre en un tiempo Δt que es despreciable comparado con el tiempo durante el cual estamos observando al sistema. Podemos también caracterizar a una colisión como un evento en el que las fuerzas externas que pueden actuar sobre el sistema son despreciables comparadas con las fuerzas impulsivas de la colisión (véase el problema muestra 1). Cuando un bate choca contra una bola de béisbol, o un palo de golf choca contra una bola de golf, o una bola de billar choca contra otra, actúan fuerzas externas sobre el sistema. La gravedad o la fricción pueden ejercer fuerzas sobre estos cuerpos, por ejemplo; estas fuerzas externas pueden no ser las mismas sobre cada cuerpo al chocar ni necesariamente son canceladas por otras fuerzas externas. Aun así, es bastante seguro despreciar estas fuerzas externas durante la colisión y suponer una conservación del ímpetu siempre que, como casi siempre sucede, las fuerzas externas sean despreciables en comparación con las fuerzas impulsivas de la colisión. Como resultado, el cambio en el ímpetu de una partícula durante una colisión que surge de una fuerza externa es despreciable comparada con el cambio en el ímpetu de esa

partícula que surge de la fuerza impulsiva del choque (Fig. 8).

Por ejemplo, cuando un bate golpea contra una bola de béisbol, la colisión dura sólo unos cuantos milisegundos. Puesto que el cambio en el ímpetu de la bola es grande y el tiempo de colisión es pequeño, a partir de

$$\Delta p = \bar{F} \Delta t$$

se deduce que la fuerza impulsiva promedio \bar{F} es relativamente grande. Comparada con esta fuerza, la fuerza externa de la gravedad es despreciable. Así, durante la colisión podemos despreciar por completo esta fuerza externa para determinar el cambio en el movimiento de la bola; cuanto más corta sea la duración de la colisión tanto mejor será proceder así.

Por lo tanto, en la práctica podemos aplicar la ley de la conservación del ímpetu durante las colisiones si el tiempo de la colisión es lo suficientemente pequeño. Podemos entonces decir que el ímpetu de un sistema de partículas en el instante antes de que éstas choquen es igual al ímpetu del sistema en el instante después de haber chocado las partículas.

Problema muestra 1 Una bola de béisbol (cuyo peso oficial es de unas 5 onzas) se mueve horizontalmente a una velocidad de 93 mi/h (alrededor de 150 km/h) cuando es golpeada por el bate (véase la Fig. 1). Abandona el bate en una dirección que forma un ángulo $\phi = 35^\circ$ sobre su trayectoria y a una velocidad de 180 km/h. (a) Halle el impulso de la fuerza ejercida sobre la bola. (b) Suponiendo que la colisión dure 1.5 ms ($= 0.0015$ s), ¿cuál es la fuerza promedio? (c) Halle el cambio en el ímpetu del bate.

Solución (a) La figura 9a muestra el ímpetu inicial p_i y el ímpetu final p_f de la bola de béisbol. La masa correspondiente a 5 oz es de 0.14 kg, y la velocidad final de la bola en unidades más apropiadas es de 50 m/s. Las componentes del ímpetu final están dadas por

$$p_{fx} = mv_f \cos \phi = (0.14 \text{ kg})(50 \text{ m/s})(\cos 35^\circ) = 5.7 \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

$$p_{fy} = mv_f \sin \phi = (0.14 \text{ kg})(50 \text{ m/s})(\sin 35^\circ) = 4.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

En este sistema de coordenadas, el ímpetu inicial tiene sólo una componente x , cuyo valor (negativo) es

$$p_{ix} = mv_i = (0.14 \text{ kg})(-42 \text{ m/s}) = -5.9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

Ahora puede obtenerse el impulso:

$$J_x = p_{fx} - p_{ix} = 5.7 \text{ kg} \cdot \text{m/s} - (-5.9 \text{ kg} \cdot \text{m/s}) = 11.6 \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

$$J_y = p_{fy} - p_{iy} = 4.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s} - 0 = 4.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

En otros términos, el impulso tiene una magnitud

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{(11.6 \text{ kg} \cdot \text{m/s})^2 + (4.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s})^2} = 12.3 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

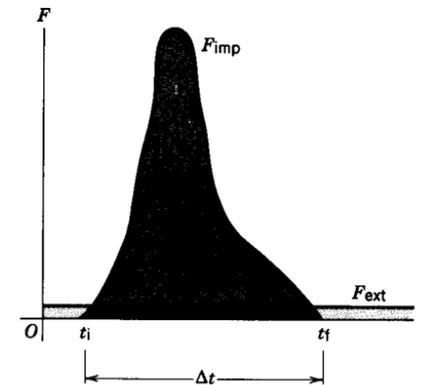


Figura 8 La fuerza impulsiva F_{imp} que actúa durante una colisión es generalmente mucho más intensa que cualquier fuerza externa F_{ext} (mostrada aquí como una constante) que puede actuar también.

y actúa en una dirección determinada por

$$\theta = \tan^{-1}(J_y/J_x) = \tan^{-1}[(4.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s})/(11.6 \text{ kg} \cdot \text{m/s})] = 19^\circ$$

sobre la horizontal. La figura 9b muestra el vector del impulso \mathbf{J} y verifica gráficamente que, como lo pide la definición de la ecuación 3,

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f + (-\mathbf{p}_i).$$

(b) Con $\mathbf{J} = \bar{\mathbf{F}}\Delta t$, tenemos que $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{J}/\Delta t$. Entonces $\bar{\mathbf{F}}$ tiene la magnitud

$$\bar{F} = (12.3 \text{ kg} \cdot \text{m/s})/0.0015 \text{ s} = 8200 \text{ N},$$

que es casi 1 tonelada. Esta fuerza actúa en la misma dirección que \mathbf{J} , esto es, 19° sobre la horizontal. Nótese que ésta es la fuerza promedio; la fuerza máxima es considerablemente mayor, como lo muestra la figura 6. También, obsérvese que \bar{F} ($= 8200 \text{ N}$) $\gg mg$ ($= 1.4 \text{ N}$). Así pues, estamos en lo cierto al suponer que la fuerza impulsiva excede notablemente a la fuerza externa (la gravedad, en este caso) y, por lo tanto, es muy cercanamente igual a la fuerza neta que actúa durante la colisión.

(c) El cambio en el ímpetu del bate es, según la ecuación 7, igual y opuesto al de la bola. Entonces, para el bate,

$$\Delta p_x = -11.6 \text{ kg} \cdot \text{m/s},$$

$$\Delta p_y = -4.0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}.$$

¿Es éste un cambio grande o un cambio pequeño? Trate de calcular el ímpetu del bate en movimiento para responder a esta pregunta.

10-4 COLISIONES EN UNA DIMENSIÓN

En esta sección consideraremos el efecto de una colisión entre dos objetos. Usualmente conocemos las velocidades iniciales de los dos objetos antes de la colisión, y nuestra meta es aplicar las leyes de conservación o las leyes del

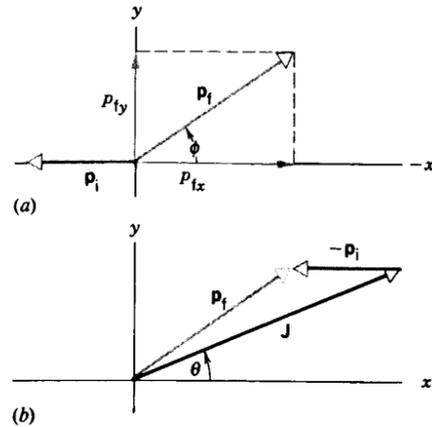


Figura 9 Problema muestra 1. (a) Los ímpetus inicial y final de la bola de béisbol. (b) La diferencia $p_f - p_i$ es igual al impulso J .

movimiento para hallar las velocidades después de la colisión.

Podemos siempre calcular los movimientos de los objetos después de que hayan chocado a partir de sus movimientos previos si conocemos las fuerzas que actúan durante la colisión, y si podemos resolver las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, en la mayoría de las colisiones no conocemos estas fuerzas. La ley de conservación del ímpetu debe cumplirse durante cualquier colisión en la que sólo actúen fuerzas internas, y puede aplicarse aun si no conocemos las fuerzas. Aunque podemos no conocer los detalles de la interacción, en muchos casos podemos usar la conservación del ímpetu y la conservación de la energía para predecir los resultados de la colisión.

El ímpetu lineal se conserva siempre en las colisiones. La energía total se conserva también: la energía total inicial de las partículas en colisión es igual a la energía total final de los productos. Esta energía puede incluir no sólo a la energía cinética sino igualmente a otras formas, tales como la energía interna, la energía de deformación, la energía rotatoria, la energía radiante, y así sucesivamente.

En una categoría especial de la colisión, llamada colisión elástica, despreciamos todas las demás formas de la energía y consideramos solamente a la energía mecánica $U + K$. Además, suponemos que, en una colisión impulsiva, las fuerzas internas actúan durante un tiempo corto y, por lo tanto, sobre una distancia corta; observamos a las partículas solamente con una separación relativa mucho más grande, de modo que los efectos de su energía potencial interna puedan ser despreciados. En una colisión elástica, la energía cinética de traslación es la única forma de energía por la que debemos responder, y la conservación de la energía mecánica es, por lo tanto, equivalente a la conservación de la energía cinética: en una colisión elástica, la energía cinética inicial K_i es igual a la energía cinética final K_f .

En otra categoría de colisión, que llamamos inelástica, la energía aparece en otras formas, y las energías cinéticas inicial y final no son iguales. En ciertos casos $K_i > K_f$, como, por ejemplo, cuando la energía cinética inicial se convierte en energía interna de los productos, mientras que en otros casos $K_i < K_f$, como cuando la energía interna almacenada en las partículas al chocar se libera. En una colisión inelástica la energía mecánica $U + K$ no se conserva, pero la energía total sí (véase la sección 8-6). Cuando los cuerpos que chocan son simples, tales como átomos o moléculas, a menudo podemos tener en cuenta directamente la diferencia entre K_i y K_f en función de los estados conocidos de la energía interna discreta del sistema. En sistemas más complejos, tal como cuando chocan dos automóviles, vemos a la diferencia simplemente como energía cinética "perdida" o "ganada".

Todas las colisiones entre objetos reales son hasta cierto punto inelásticas. Cuando los objetos son muy rígidos, tales como las bolas de billar, podemos a menudo tratar a la colisión como aproximadamente elástica. En este caso, la energía que cambia de cinética a otras formas (como la onda de sonido que se escucha al chocar las bolas) es despreciable comparada con la energía cinética. Nótese que la clasificación de una colisión como elástica o inelástica es independiente del marco de referencia desde el que se vea la colisión.

Cuando los dos cuerpos se pegan después de la colisión, se dice que la colisión es completamente inelástica. Por ejemplo, la colisión entre una bala y un bloque de madera al que se le dispara es completamente inelástica cuando la bala permanece empotrada en el bloque. El término "completamente inelástica" no significa necesariamente que toda la energía inicial se pierde; como veremos, significa más bien que la pérdida es tan grande como puede serlo, en consonancia con la conservación del ímpetu.

Aun cuando no se conozcan las fuerzas de colisión, podemos obtener los movimientos de las partículas después de la colisión a partir de los movimientos antes de la colisión, siempre y cuando la colisión sea completamente inelástica o, si la colisión es elástica, que la colisión tenga lugar en una dimensión. En una colisión unidimensional el movimiento relativo después de la colisión está a lo largo de la misma línea que el movimiento relativo antes de la colisión. Por el ímpetu nos limitaremos al movimiento unidimensional

Colisiones elásticas

Consideremos primero una colisión elástica unidimensional. Imaginemos a dos objetos (podrían ser unos deslizadores en un riel de aire) que se mueven inicialmente a lo largo de la línea que une a sus centros, luego chocan de frente y se mueven a lo largo de la misma línea recta después de la colisión (véase la Fig. 10). Estos cuerpos ejercen fuerzas

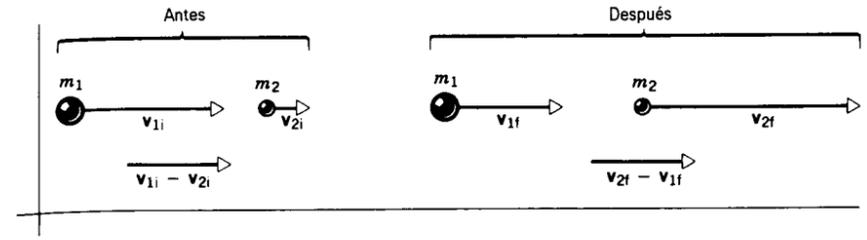


Figura 10 Dos partículas antes y después de una colisión elástica. Nótese que las velocidades relativas antes y después son iguales.

entre sí durante la colisión que están a lo largo de la línea de movimiento inicial, de modo que el movimiento final está también a lo largo de la misma línea.

Las masas de las partículas en colisión son m_1 y m_2 , siendo las componentes de la velocidad v_{1i} y v_{2i} antes de la colisión y v_{1f} y v_{2f} después de la colisión. [En nuestra notación, los subíndices numéricos 1 y 2 especifican la partícula, mientras que los subíndices i y f se refieren, respectivamente, a los valores iniciales (antes de la colisión) y a los valores finales (después de la colisión).] Tomamos la dirección positiva del ímpetu y la velocidad hacia la derecha en la figura 10. Suponemos, a no ser que especifiquemos lo contrario, que las velocidades de las partículas en colisión sean lo suficientemente bajas como para que no necesitemos emplear las expresiones relativistas del ímpetu y de la energía cinética. Entonces, según la conservación del ímpetu, obtenemos

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (10)$$

Puesto que estamos considerando una colisión elástica, la energía cinética se conserva por definición, y obtenemos, al ser $K_i = K_f$,

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (11)$$

Si conocemos las masas y las velocidades iniciales, podemos calcular las dos velocidades finales (incógnitas) v_{1f} y v_{2f} a partir de estas dos ecuaciones.

La ecuación del ímpetu puede ser escrita así:

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}), \quad (12)$$

y la ecuación de la energía puede escribirse como:

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2). \quad (13)$$

Dividiendo la ecuación 13 entre la ecuación 12, y suponiendo que $v_{2f} \neq v_{2i}$, y que $v_{1f} \neq v_{1i}$ (véase la pregunta 15), obtenemos

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

y, después de un reordenamiento,

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}). \quad (14)$$

Esto nos dice que, en una colisión unidimensional elástica, la velocidad relativa de acercamiento antes de la colisión es igual y opuesta a la velocidad relativa de separación después de la colisión, sin importar cuáles puedan ser las masas de las partículas en colisión.

Para obtener las componentes de la velocidad v_{1f} y v_{2f} después de la colisión a partir de las componentes de la velocidad v_{1i} y v_{2i} antes de la colisión, combinamos las ecuaciones 12 y 14 para eliminar a v_{2f} y resolver para v_{1f} :

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}. \quad (15)$$

Similarmente, eliminamos a v_{1f} y resolvemos para v_{2f} :

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}. \quad (16)$$

Las ecuaciones 15 y 16, que se cumplen en todos los marcos de referencia inerciales, son resultados generales que nos permiten obtener las velocidades finales en cualquier colisión elástica unidimensional. Estas ecuaciones las simplificamos a menudo eligiendo un marco en el que la partícula blanco (digamos, m_2) está inicialmente en reposo, permitiéndonos así poner $v_{2i} = 0$ en las ecuaciones 15 y 16. Pasemos ahora a estudiar ciertos casos especiales de interés.

1. Masas iguales. Cuando las partículas en colisión tienen masas iguales ($m_1 = m_2$), las ecuaciones 15 y 16 se transforman simplemente en

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{y} \quad v_{2f} = v_{1i}. \quad (17)$$

Esto es, las partículas intercambian velocidades: la velocidad final de una partícula es igual a la velocidad inicial de la otra.

2. Partícula blanco en reposo. Otro caso de interés es cuando la partícula m_2 está inicialmente en reposo. Entonces $v_{2i} = 0$ y

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}. \quad (18)$$

Combinando este caso especial con el anterior (esto es, una colisión entre partículas de igual masa, donde una está

inicialmente en reposo), vemos que la primera partícula es “detenida en seco” y la segunda “sale” con la velocidad que tenía la primera originalmente. A menudo es posible observar este efecto en las colisiones de las bolas de billar que no giran.

3. **Blanco masivo.** Si $m_2 \gg m_1$, entonces las ecuaciones 15 y 16 se reducen a

$$v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i} \quad \text{y} \quad v_{2f} \approx v_{2i}. \quad (19)$$

Cuando la partícula de gran masa se mueve lentamente o está en reposo, entonces

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} \approx 0. \quad (20)$$

Esto es, cuando un proyectil liviano choca contra otro de masa mucho mayor que está en reposo, la velocidad de la partícula menos pesada se invierte aproximadamente, y la partícula de más masa permanece aproximadamente en reposo. Por ejemplo, una pelota que se deje caer desde una altura h rebota del suelo después de la colisión con velocidad invertida y, si la colisión fuese perfectamente elástica y no hubiese resistencia del aire, llegaría a la misma altura h . De manera similar, un electrón rebota de un átomo (con masa relativa) en una colisión de frente y su movimiento se invierte, mientras que el átomo blanco no resulta en esencia afectado por la colisión.

4. **Proyectil masivo.** Cuando $m_1 \gg m_2$, las ecuaciones 15 y 16 se convierten en

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{y} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i}. \quad (21)$$

Si la partícula blanco de menor peso está inicialmente en reposo (o se mueve mucho más lentamente que m_1), entonces, después de la colisión la partícula blanco se mueve al doble de la velocidad de m_1 . El movimiento de m_1 no se ve casi afectado por la colisión con el blanco más ligero.

En la dispersión de la partícula alfa (Fig. 2), la partícula alfa incidente (cuya masa es de alrededor de 8000 veces la masa del electrón) no resulta en esencial afectada por las colisiones con los electrones de los átomos blanco (como lo indican las muchas trayectorias en línea recta de la Fig. 2). La partícula alfa se desvía solamente en los raros encuentros con el núcleo masivo de un átomo blanco.

Colisiones inelásticas

Consideraremos ahora las colisiones inelásticas, en las que, por definición, la energía cinética no se conserva, aunque por supuesto, la conservación del ímpetu siempre se cumple. La conservación de la energía total se cumple también, pero la inclusión de formas de energía diferentes a la cinética añade más términos a la ecuación 11 y, a no

ser que podamos especificar exactamente las transferencias de energía (por ejemplo, cuánta energía interna se convierte en cinética), ya no tenemos un sistema de ecuaciones que pueda resolverse.

En un caso inelástico especial, el de la colisión completamente inelástica, el resultado final puede obtenerse a partir de los valores iniciales solamente. En este caso, las partículas se quedan pegadas y se mueven a una velocidad común v_f después de la colisión. Entonces existe solamente una incógnita, y la ecuación del ímpetu sola (Ec. 10) es suficiente. Reemplazando tanto v_{1f} como v_{2f} en esa ecuación por la velocidad común v_f nos conduce a

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}. \quad (22)$$

Cuando m_2 está inicialmente en reposo, ésta se reduce a

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}. \quad (23)$$

La velocidad de m_1 se “reduce” por la razón de masas $m_1/(m_1 + m_2)$. Cuanto más grande sea m_1 , más rápido se moverá la combinación; cuanto más pequeña sea m_1 , más lentamente se moverá.

La ecuación 22 puede aplicarse igualmente bien en sentido inverso. Esto es, una partícula de masa M que se mueva a velocidad v_f se divide en dos partículas, una de masa m_1 que se mueve a velocidad v_{1i} y otra de masa m_2 ($= M - m_1$) que se mueve en dirección opuesta a velocidad v_{2i} . Este resultado se aplica aun cuando la explosión pudiera impartir una energía cinética considerable a las dos partículas. En el caso especial en que $v_f = 0$ (la partícula inicial está en reposo), tendremos que $v_{1i}/v_{2i} = -m_2/m_1$. La partícula de mayor masa tiene la velocidad menor, como lo esperaríamos con objeto de hacer que el ímpetu total sea cero, y las dos partículas se mueven en direcciones opuestas. En la sección 10-7 se consideran las aplicaciones de este principio a los procesos de desintegración espontánea.

Problema muestra 2 (a) ¿En qué fracción decrece la energía cinética de un neutrón (masa m_1) en una colisión elástica frontal con un núcleo atómico (masa m_2) inicialmente en reposo? (b) Halle la disminución fraccionaria de la energía cinética de un neutrón cuando choca de igual modo con un núcleo de plomo, un núcleo de carbono, y un núcleo de hidrógeno. La razón de la masa del núcleo a la masa del neutrón ($= m_2/m_1$) es 206 para el plomo, 12 para el carbono, y 1 para el hidrógeno.

Solución (a) La energía cinética inicial K_i del neutrón, suponiendo que sea no relativista, es $\frac{1}{2}m_1 v_{1i}^2$. Su energía cinética final K_f es $\frac{1}{2}m_1 v_{1f}^2$. La disminución fraccionaria de la energía cinética es

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}$$

Pero, para una colisión tal (véase la Ec. 18),

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i},$$

de modo que

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}.$$

(b) Para el plomo, siendo $m_2 = 206m_1$,

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(206m_1)}{(207m_1)^2} = 0.02 = 2\%.$$

Para el carbono, siendo $m_2 = 12m_1$,

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(12m_1)}{(13m_1)^2} = 0.28 = 28\%.$$

Para el hidrógeno, siendo $m_2 = m_1$,

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(m_1)}{(2m_1)^2} = 1 = 100\%.$$

Estos resultados explican por qué un material como la parafina, con su alto contenido de hidrógeno, es mucho más eficaz para decelerar los neutrones de lo que lo es un material pesado, como el plomo. Sin embargo, obsérvese que las colisiones no siempre son “frontales” como lo hemos supuesto a lo largo de toda esta sección. Aunque un neutrón no perdería toda su energía en una colisión oblicua más típica contra el hidrógeno en reposo, todavía perderá energía mucho más eficientemente en materiales hidrogenados de lo que lo hará en el caso del carbono o del plomo.

La fisión del uranio en un reactor produce neutrones con energías cinéticas relativamente grandes, en la región de MeV. Para que se produzca una reacción en cadena, estos neutrones deben ser empleados para iniciar otros eventos de fisión, pero la probabilidad de que un neutrón cause una fisión disminuye rápidamente al crecer la energía cinética del neutrón. Por lo tanto es necesario decelerar o moderar a los neutrones hasta que su energía esté en la región de eV, donde la probabilidad de la fisión es de casi tres órdenes mayor. El cálculo anterior, aunque quizás muy simplificado, demuestra que un material rico en hidrógeno, tal como el agua o la parafina, sería una buena elección como moderador.

Problema muestra 3 Un péndulo balístico (Fig. 11) es un dispositivo que se empleaba para medir la velocidad de las balas antes de que se dispusiera de dispositivos electrónicos para medir el tiempo. Consta de un gran bloque de madera de masa M , colgado de dos pares largos de cuerdas. Se dispara una bala de masa m contra el bloque, dentro del cual llega rápidamente al reposo. La combinación bloque + bala oscila, elevándose su centro de masa a una distancia vertical h antes de que el péndulo llegue momentáneamente al reposo en el extremo de su arco. Tome la masa del bloque como $M = 5.4$ kg y la masa de la bala como $m = 9.5$ g. (a) ¿Cuál es la velocidad inicial de la bala si el bloque se eleva a una altura de $h = 6.3$ cm? (b) ¿Cuál es la energía cinética inicial de la bala? ¿Cuánta de esta energía permanece como energía mecánica del péndulo al oscilar?

Solución (a) Cuando la bala choca contra el bloque tenemos, por la conservación del ímpetu en la dirección horizontal,

$$mv = (M + m)V,$$

donde v es la velocidad de la bala antes del impacto y V es la velocidad de la combinación después del impacto. Aunque

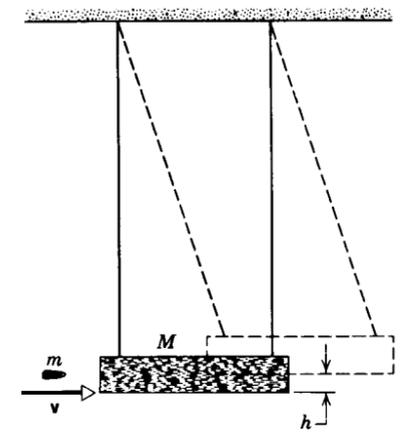


Figura 11 Problema muestra 3. Un péndulo balístico es utilizado para medir la velocidad de una bala.

la energía mecánica ciertamente *no* se conserva durante la colisión de la bala con el bloque, *sí* se conserva en el péndulo al oscilar después del impacto. La energía cinética del sistema cuando el bloque está en el fondo de su arco debe, entonces, ser igual a la energía potencial del sistema cuando el bloque está en la parte superior, o sea

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh.$$

Eliminando a V entre estas dos ecuaciones llegamos a

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{M + m}{m} \right) \sqrt{2gh} \\ &= \left(\frac{5.4 \text{ kg} + 0.0095 \text{ kg}}{0.0095 \text{ kg}} \right) \sqrt{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.063 \text{ m})} = 630 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Podemos ver al péndulo balístico como una clase de transformador, intercambiando la alta velocidad de un objeto ligero (la bala) con la baja velocidad y, por lo tanto más fácilmente medible, de un objeto masivo (el bloque).

(b) La energía cinética de la bala es

$$K_b = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.0095 \text{ kg})(630 \text{ m/s})^2 = 1900 \text{ J}.$$

La energía mecánica del péndulo al oscilar es igual a su energía potencial cuando el bloque está en la parte más alta de su oscilación, o sea

$$\begin{aligned} E &= (M + m)gh = (5.4 \text{ kg} + 0.0095 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(0.063 \text{ m}) \\ &= 3.3 \text{ J}. \end{aligned}$$

Entonces solamente 3.3/1900, o sea 0.2% de la energía cinética original de la bala se transfiere a energía mecánica del péndulo. El resto se almacena dentro del bloque del péndulo como energía interna o se transfiere al entorno, por ejemplo como ondas de calor o de sonido.

10-5 COLISIONES BIDIMENSIONALES

Si dos partículas colisionan de una manera diferente a la frontal, las partículas pueden moverse en direcciones que

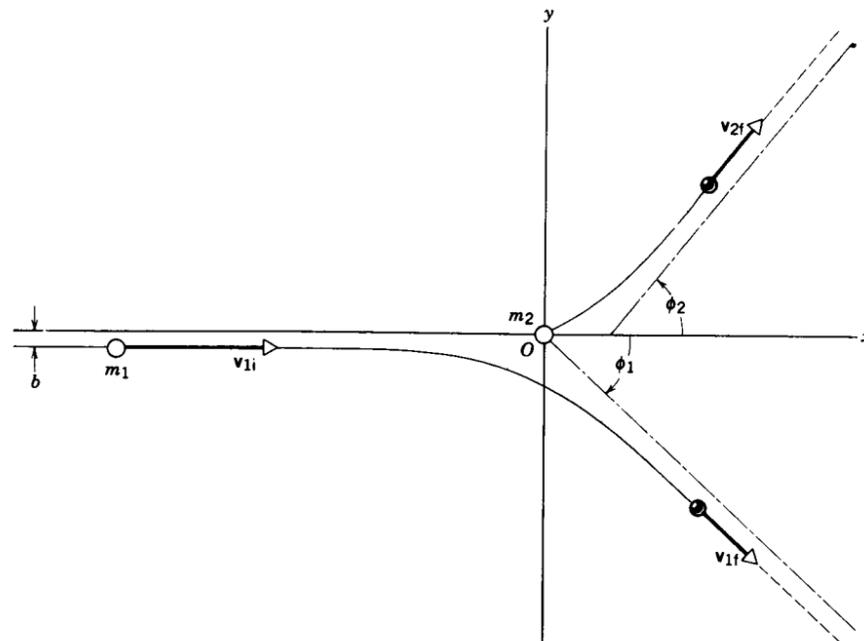


Figura 12 Dos partículas en colisión. Los círculos abiertos indican sus posiciones antes de la colisión y los círculos llenos, señalan cuáles son éstas después de la colisión. Inicialmente, la partícula 2 está en reposo. El parámetro b de impacto es la distancia por la cual la colisión deja de ser frontal.

no coincidan con las direcciones del movimiento original. La figura 12 muestra la geometría de una de estas colisiones. Hemos elegido a nuestro sistema de coordenadas de modo que p_1 tenga sólo una componente x , simplificando así el cálculo un poco. Se supone que la partícula blanco m_2 está en reposo. La distancia b entre la línea del movimiento de la partícula incidente y una línea paralela que pase por m_2 se llama *parámetro del impacto*. Una colisión frontal corresponde a $b = 0$, y valores más grandes de b indican una colisión más oblicua. La figura podría representar las trayectorias de dos núcleos que colisionan a causa de sus respectivas fuerzas electrostáticas de repulsión; la fuerza depende inversamente del cuadrado de la distancia entre los núcleos, los cuales no necesitan en realidad estar en contacto para la colisión. Para distancias suficientemente grandes la fuerza se hace pequeña, y las partículas se mueven en línea recta sin resultar en esencia afectadas por la fuerza.

Independientemente de la fuerza que actúe entre las partículas, el ímpetu debe conservarse. La fuerza entre las partículas es una fuerza interna, que no puede cambiar el ímpetu total del sistema de dos partículas. Además, puesto que el ímpetu es un vector, sabemos que las componentes x y las componentes y nos darán dos ecuaciones escalares independientes. Para las componentes x , el ímpetu inicial es $m_1 v_{1i}$ a lo largo del eje x , y el ímpetu final total es la suma de las componentes x de los ímpetus finales de las dos partículas:

$$p_{ix} = p_{fx}$$

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \phi_1 + m_2 v_{2f} \cos \phi_2. \quad (24)$$

Aquí tenemos en cuenta las direcciones de v_{1f} y de v_{2f} a través de los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 , respectivamente; así en la ecuación 24, v_{1f} y v_{2f} indican las *magnitudes* de las velocidades y son siempre positivas. Esto contrasta con las ecuaciones 15 y 16 o con la ecuación 22, las cuales manejaban las *componentes* de la velocidad que podían ser positivas o negativas.

El ímpetu y inicial es cero (gracias a que elegimos para simplificar, los ejes de coordenadas), y el ímpetu y final es la diferencia entre el de cada una de las partículas (hemos elegido ϕ_1 y a ϕ_2 en los lados opuestos del eje x , de modo que la suma de las componentes y dé por resultado una diferencia algebraica):

$$p_{iy} = p_{fy}$$

$$0 = m_1 v_{1f} \sin \phi_1 - m_2 v_{2f} \sin \phi_2. \quad (25)$$

Si la colisión es elástica, se cumple el resultado usual para la conservación de la energía. Igualando las energías cinéticas inicial y final tenemos

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2. \quad (26)$$

Dadas las condiciones iniciales (m_1 , m_2 , y v_{1i}), en las Ecs. 24 a 26 existen cuatro incógnitas (v_{1f} , v_{2f} , ϕ_1 , ϕ_2), pero sólo tres ecuaciones las relacionan. No existe una solución única para tal sistema indeterminado de ecuaciones; de hecho, existe un número infinito de soluciones. Para obtener una solución única, debemos contar con una limitación o restricción adicional. Por ejemplo, podemos decidirnos por observar la partícula 1 en un ángulo ϕ_1 determinado, como en el problema muestra 4. Una vez hayamos hecho esa elección, las tres ecuaciones pueden resolverse para las tres incógnitas restantes.

Problema muestra 4 Una molécula de gas con una velocidad de 322 m/s choca elásticamente con otra molécula de la misma masa inicialmente en reposo. Después de la colisión la primera molécula se mueve formando un ángulo de 30° con su dirección inicial. Halle la velocidad de cada molécula después de la colisión y el ángulo formado con la dirección incidente de la molécula blanco que recula.

Solución Este ejemplo corresponde exactamente a las ecuaciones 24 a 26, siendo $m_1 = m_2$, $v_{1i} = 322$ m/s, y $\phi = 30^\circ$. Haciendo que m_1 sea igual a m_2 , tenemos las relaciones

$$v_{1i} = v_{1f} \cos \phi_1 + v_{2f} \cos \phi_2, \quad (27)$$

$$v_{1f} \sin \phi_1 = v_{2f} \sin \phi_2, \quad (28)$$

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2. \quad (29)$$

Debemos de resolver para v_{1f} , v_{2f} , y ϕ_2 . Para hacerlo, primero eliminamos a ϕ_2 elevando al cuadrado la ecuación 27 (reescribiéndola como $v_{1i} - v_{1f} \cos \phi_1 = v_{2f} \cos \phi_2$), y la sumamos al cuadrado de la ecuación 28. Observando que $\sin^2 \phi_2 + \cos^2 \phi_2 = 1$, obtenemos

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \phi_1 = v_{2f}^2.$$

Combinando ésta con la ecuación 29, obtenemos (siempre que $v_{1f} \neq 0$)

$$v_{1f} = v_{1i} \cos \phi_1 = (322 \text{ m/s})(\cos 30^\circ) = 279 \text{ m/s}.$$

De la ecuación 29

$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = (322 \text{ m/s})^2 - (279 \text{ m/s})^2,$$

o sea,

$$v_{2f} = 161 \text{ m/s}.$$

Por último, de la ecuación 28

$$\sin \phi_2 = \frac{v_{1f}}{v_{2f}} \sin \phi_1$$

$$= \frac{279 \text{ m/s}}{161 \text{ m/s}} \sin 30^\circ = 0.866$$

o

$$\phi_2 = 60^\circ.$$

Las dos moléculas se apartan en ángulos rectos ($\phi_1 + \phi_2 = 90^\circ$ en la Fig. 12).

Debería ser para nosotros posible demostrar que, en una colisión elástica entre partículas de igual masa, una de las cuales esté inicialmente en reposo, las partículas, que reculan se desvían siempre en ángulos rectos entre sí. La figura 13 muestra una serie de cuatro colisiones elásticas sucesivas entre protones provocadas cuando un protón de energía elevada entra en una cámara de burbujas llena de hidrógeno líquido, el cual suministra los protones blanco. El rastro de las partículas se hace visible por a huella de burbujas dejada en su camino. Puesto que las partículas en interacción son de igual masa y las colisiones son elásticas, las partículas reculan formando ángulos rectos entre sí; esto se hace evidente cuando el rastro representado en la figura 13 se ve estereoscópicamente. Véase la figura 2 para otro ejemplo.

Colisiones inelásticas en dos dimensiones

Si la colisión es inelástica, la ecuación 26 ya no tiene aplicación. A menudo podemos sustituirla por una expres-

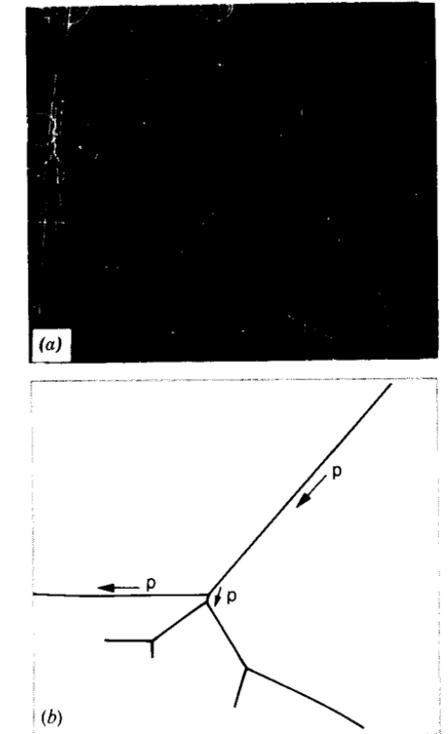


Figura 13 (a) Cuatro colisiones protón-protón en una cámara de burbujas. (b) Una representación esquemática de las trayectorias de los protones. El protón original entra por la esquina superior derecha. El rastro no está completo en el plano de la fotografía, y una visión estereoscópica muestra que el ángulo entre el protón incidente y el protón saliente en cada colisión es de 90° , como se esperaba. Los demás rastros que se ven en la foto son causados por mesones (curvaturas suaves) y por electrones (espirales cerradas).

sión equivalente que tenga en cuenta la energía convertida a (o a partir de) energía cinética y que, por lo tanto, arroje una relación entre las energías cinéticas inicial y final.

Una colisión en dos dimensiones *completamente* inelástica debe comenzar con ambos cuerpos en movimiento. (¿Por qué?) De nuevo, hacemos que el movimiento de un cuerpo defina al eje x , y disponemos la colisión de modo que los dos cuerpos se encuentren y se adhieran entre sí en el origen. El objeto final se mueve entonces en la dirección ϕ_f a una velocidad v_f (Fig. 14). La conservación del ímpetu para las componentes x y y da lo siguiente:

$$\text{componente } x: m_1 v_1 + m_2 v_2 \cos \phi_2 = M v_f \cos \phi_f, \quad (30)$$

$$\text{componente } y: m_2 v_2 \sin \phi_2 = M v_f \sin \phi_f. \quad (31)$$

Aquí $M = m_1 + m_2$ es la masa total de la combinación después de la colisión. Puesto que la combinación se mueve a una velocidad común (en magnitud y en direc-

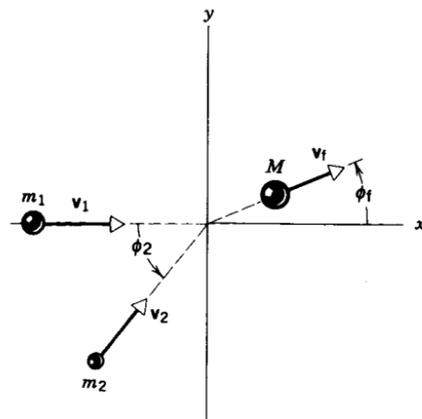


Figura 14 Una colisión completamente inelástica en dos dimensiones. Las partículas con masas m_1 y m_2 colisionan para formar la partícula combinada de masa M .

ción), las cuatro incógnitas del caso elástico se reducen a dos: v_f y ϕ_f . Las dos ecuaciones (Ecs. 30 y 31) son suficientes para una solución única.

Problema muestra 5 Dos patinadores chocan y se abrazan en una colisión completamente inelástica. Esto es, se quedan unidos después del impacto, como lo sugiere la figura 15. Alfredo, cuya masa m_A es de 83 kg, se mueve originalmente hacia el este a una velocidad de $v_A = 6.4$ km/h. Bárbara, cuya masa m_B es de 55 kg, se mueve originalmente hacia el norte a una velocidad de $v_B = 8.8$ km/h. (a) ¿Cuál es la velocidad V de la pareja después del impacto? (b) ¿Cuál es el cambio fraccionario en la energía cinética de los patinadores a causa de la colisión?

Solución (a) El ímpetu se conserva en la colisión. Podemos escribir, para las componentes de los dos ímpetus:

$$\text{componente } x: \quad m_A v_A = MV \cos \phi, \quad (32)$$

$$\text{componente } y: \quad m_B v_B = MV \sin \phi, \quad (33)$$

donde $M = m_A + m_B$. Dividiendo la ecuación 33 entre la ecuación 32 nos da

$$\tan \phi = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55 \text{ kg})(8.8 \text{ km/h})}{(83 \text{ kg})(6.4 \text{ km/h})} = 0.911.$$

Entonces

$$\phi = \tan^{-1} 0.911 = 42.3^\circ.$$

De la ecuación 33 tenemos entonces que

$$V = \frac{m_B v_B}{M \sin \phi} = \frac{(55 \text{ kg})(8.8 \text{ km/h})}{(83 \text{ kg} + 55 \text{ kg})(\sin 42.3^\circ)} = 5.21 \text{ km/h}.$$

(b) La energía cinética inicial es

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \\ &= \frac{1}{2} (83 \text{ kg})(6.4 \text{ km/h})^2 + \frac{1}{2} (55 \text{ kg})(8.8 \text{ km/h})^2 \\ &= 3830 \text{ kg} \cdot \text{km}^2/\text{h}^2. \end{aligned}$$

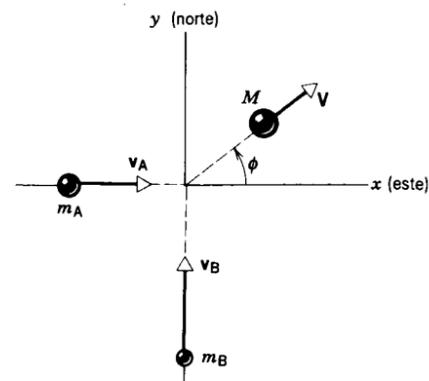


Figura 15 Problema muestra 5. Dos patinadores, Alfredo (A) y Bárbara (B), sufren una colisión completamente inelástica. Después de ello, se mueven juntos en una dirección dada por el ángulo ϕ .

La energía cinética final es

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2} M V^2 \\ &= \frac{1}{2} (83 \text{ kg} + 55 \text{ kg})(5.21 \text{ km/h})^2 \\ &= 1870 \text{ kg} \cdot \text{km}^2/\text{h}^2. \end{aligned}$$

La fracción que buscamos es, entonces,

$$f = \frac{K_f - K_i}{K_i} = \frac{1870 \text{ kg} \cdot \text{km}^2/\text{h}^2 - 3830 \text{ kg} \cdot \text{km}^2/\text{h}^2}{3830 \text{ kg} \cdot \text{km}^2/\text{h}^2} = -0.51.$$

Así, el 51% de la energía cinética inicial se pierde en la colisión. Debe disiparse en alguna forma, o, en su lugar, como energía interna de la pareja de patinadores.

10-6 MARCO DE REFERENCIA DEL CENTRO DE MASA

Cuando se llevan a cabo experimentos de colisiones en la práctica, las mediciones se hacen naturalmente en un marco de referencia fijo en el laboratorio (el *marco del laboratorio*). Muy a menudo, tales experimentos consisten en el disparo de un proyectil disparado a un blanco que está en reposo en el laboratorio. En muchos experimentos de la física de partículas, por el contrario, dos partículas de igual masa y velocidad (dos protones, quizá, o dos electrones) se disparan directamente una contra la otra. Sin importar cómo se lleve a cabo el experimento, a menudo el análisis es más fácil y la comprensión física se aclara si vemos a la colisión desde un marco de referencia ligado al centro de masa de las partículas en colisión (el *marco del centro de masa*).

Por ejemplo, consideremos el caso sencillo de una colisión elástica unidimensional (de frente) entre dos partículas idénticas. Si una partícula (el blanco) está fija en

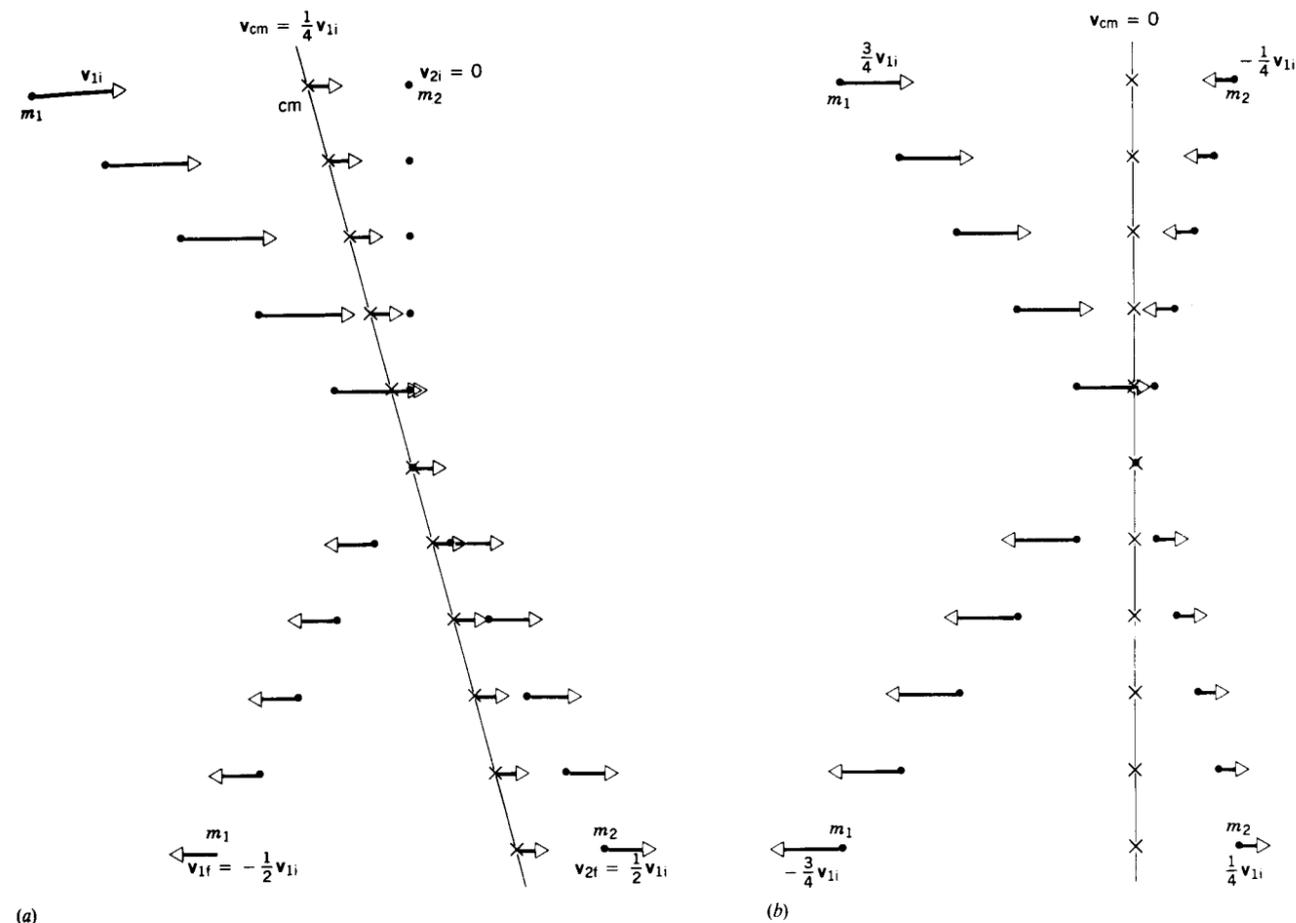


Figura 16 Una serie de "instantáneas" de dos partículas de masa m_1 y $m_2 = 3m_1$, que chocan elásticamente en una dimensión. El centro de masa de las dos partículas se indica por una X. (a) Marco de referencia del laboratorio. (b) Marco de referencia del centro de masa.

el laboratorio, la otra partícula (el proyectil, que inicialmente se mueve a velocidad v) se lleva al reposo, y la partícula blanco original se mueve hacia adelante a velocidad v . Sin embargo, en el marco del centro de masa, las dos partículas se aproximan entre sí antes de la colisión, cada una a velocidad $\frac{1}{2}v$, y retroceden ambas a la misma velocidad después de la colisión. Ya no existe diferencia entre el proyectil y el blanco, y la descripción del suceso es completamente simétrica en este marco de referencia.

La figura 16a muestra una serie de "instantáneas" de una colisión elástica entre una partícula de masa m_1 , inicialmente en movimiento, y una partícula estacionaria de masa $m_2 = 3m_1$. Puesto que sólo actúan fuerzas internas en la colisión, el movimiento del centro de masa, como se muestra en la figura 16a, no es afectado por la colisión. El centro de masa de m_1 y de m_2 , calculado a partir de la ecuación 4 del capítulo 9, se mueve a la misma velocidad constante v_{cm} tanto antes como después de la colisión.

La velocidad del centro de masa se halla de la ecuación 5, del capítulo 9,

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}, \quad (34)$$

con $v_{2i} = 0$. Elaboremos ahora un diagrama de la misma colisión vista desde un marco de referencia que se mueva, respecto al laboratorio, a la velocidad v_{cm} . Éste es el marco de referencia del centro de masa. Las velocidades de m_1 y de m_2 en este marco pueden obtenerse de la ecuación 43 de la sección 4-6 para las transformaciones de velocidad entre marcos de referencia:

$$v = v' + u, \quad (35)$$

donde v es la velocidad medida en el marco del laboratorio, v' es la velocidad medida en el marco de referencia que se mueve respecto al laboratorio, y u es la velocidad

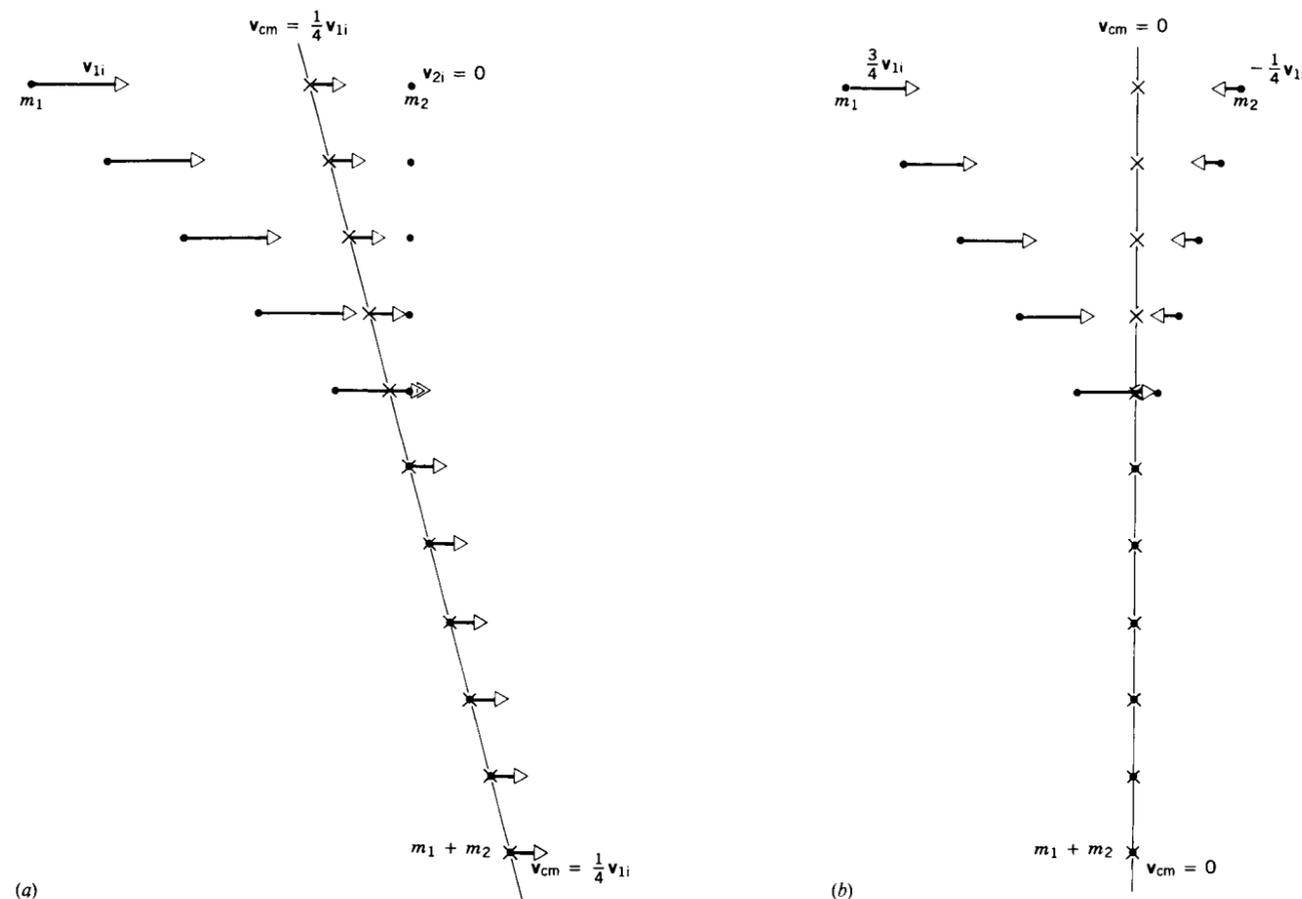


Figura 17 Serie de “instantáneas” de dos partículas de masas m_1 y $m_2 = 3m_1$ en choque completamente inelástico en una dimensión. (a) Marco de referencia del laboratorio. (b) Marco de referencia del centro de masa.

del marco que se mueve respecto al marco del laboratorio. En nuestro caso, el marco móvil es el marco del centro de masa y $u = v_{cm}$. Podemos entonces hallar las velocidades iniciales de m_1 y de m_2 en el marco móvil:

$$v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm} = v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}, \quad (36)$$

$$v'_{2i} = v_{2i} - v_{cm} = 0 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} = -\left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}. \quad (37)$$

Las velocidades finales en el marco del laboratorio están dadas en la ecuación 18, y éstas pueden también ser transformadas dentro del marco del centro de masa:

$$v'_{1f} = v_{1f} - v_{cm} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}$$

$$= -\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}, \quad (38)$$

$$v'_{2f} = v_{2f} - v_{cm} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i}. \quad (39)$$

Nótese la simetría de estos resultados. En el marco del centro de masa, las velocidades de m_1 y de m_2 simplemente invierten direcciones en la colisión, donde la velocidad de m_1 va desde $+m_2 v_{1i}/(m_1 + m_2)$ hasta $-m_1 v_{1i}/(m_1 + m_2)$, y la velocidad de m_2 va desde $-m_1 v_{1i}/(m_1 + m_2)$ hasta $+m_1 v_{1i}/(m_1 + m_2)$. En la figura 16b se muestra una serie de instantáneas de la colisión en el marco de referencia del centro de masa. En este marco de referencia especial, cada partícula lleva a cabo un movimiento similar a una pelota que rebota en una superficie dura; la otra partícula está allí precisamente para dar el impulso para la inversión del movimiento. Es también obvio en este marco de referencia que

cia que la energía cinética total permanece constante en la colisión. (De hecho, permanece constante para cada partícula por separado.) Contemplando la colisión desde esta perspectiva, adquirimos una visión nueva del significado de colisión “elástica”.

Veamos ahora la colisión unidimensional completamente inelástica en el marco del centro de masa. De nuevo, suponemos que m_1 es la incidente sobre $m_2 (= 3m_1)$ en reposo en el laboratorio. Después de la colisión, existe una partícula compuesta de masa $M = m_1 + m_2$. La velocidad del centro de masa está, una vez más, dada por la ecuación 34. La secuencia de instantáneas de la figura 17a nos muestra la colisión en el marco del laboratorio; de nuevo, el centro de masa se mueve a la misma velocidad antes y después de la colisión.

Las velocidades iniciales de m_1 y m_2 se transforman exactamente de la misma manera que en el caso anterior y están dadas por las ecuaciones 36 y 37. La velocidad final del centro de masa de M después de la colisión puede hallarse al transformar el resultado general para v_f en el marco del laboratorio, ecuación 23:

$$v'_f = v_f - v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} = 0.$$

Por supuesto que este resultado no debería sorprendernos en absoluto. La masa combinada M está siempre en el centro de masa, puesto que contiene toda la masa del sistema después de la colisión. En el marco del laborato-

rio, M debe moverse a la velocidad del centro de masa, y al comparar las ecuaciones 23 y 34 vemos que realmente lo hace. En un marco de referencia en el cual el centro de masa esté en reposo, M debe estar también en reposo.

En el marco del centro de masa (Fig. 17b) existe de nuevo una simetría: antes de la colisión, m_1 y m_2 se aproximan con ímpetus iguales y opuestos. Después de que chocan y se combinan, el ímpetu debe ser cero.

Existe otra propiedad interesante de la colisión completamente inelástica en el marco de referencia del centro de masa. En el marco del laboratorio, la energía cinética perdida (esto es, convertida a energía interna, energía de deformación, etc.) es siempre menos del 100%; por ejemplo, en una colisión entre dos partículas de igual masa, una de las cuales está inicialmente en reposo, la pérdida de energía cinética es de 50%. En el marco del centro de masa, la pérdida es siempre del 100%, independientemente de los valores de m_1 y de m_2 . Cuando el propósito de la colisión de las partículas consiste en convertir energía cinética en otra forma, conviene no sólo analizar sino efectivamente realizar el experimento en el marco del centro de masa.

En los estudios de las propiedades de las partículas fundamentales de la naturaleza, el objetivo suele con frecuencia ser el de aplastar las partículas con una energía elevada para producir nuevas y exóticas variedades de partículas de masas mayores; en este caso, la energía cinética se transforma en la colisión en energía en reposo

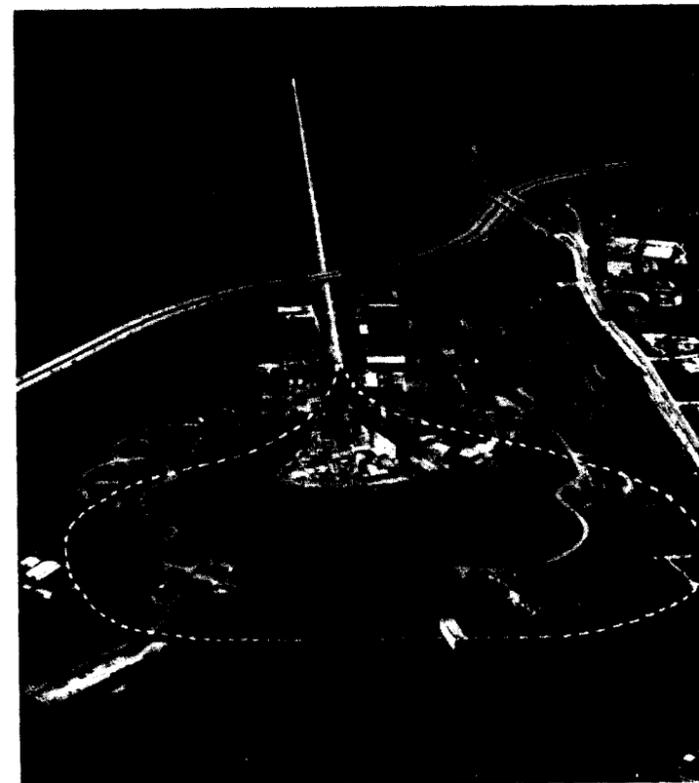


Figura 18 El acelerador de electrones de 2 millas de longitud del Stanford Linear Accelerator Center. Los electrones y los positrones son acelerados a lo largo de la sección recta. Las líneas punteadas muestran las trayectorias subterráneas de los electrones y de los positrones cuando se les hace colisionar en un laboratorio situado en la parte inferior de la foto. Véase “The Stanford Linear Collider”, por John R. Rees, *Scientific American*, octubre de 1989, pág. 58.

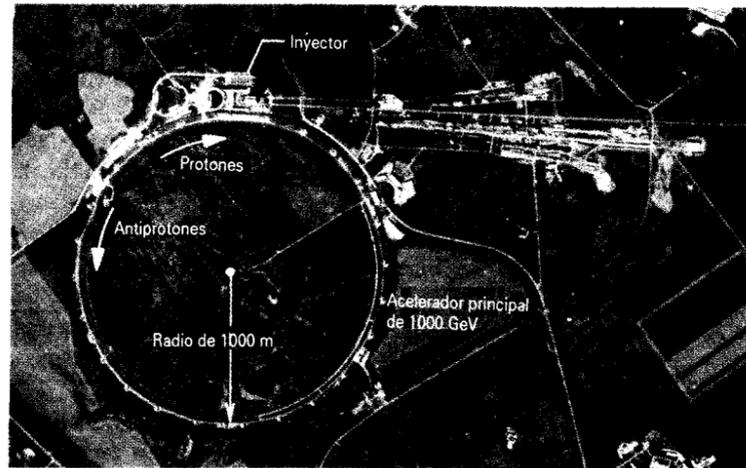


Figura 19 El Fermi National Accelerator Laboratory. Protones y antiprotones son inyectados desde el pequeño anillo, que puede verse en la parte superior de la foto, al anillo grande (de 1 km de radio). Circulan en direcciones opuestas y colisionan una vez en cada circuito.

mc^2 de las nuevas partículas. La energía disponible para formar nuevas partículas es precisamente la energía cinética “perdida” en la colisión inelástica; en el dominio de estas colisiones de alta energía, en que debemos usar las ecuaciones de la cinemática relativista, aprendemos que la energía cinética inicial de laboratorio requerida para producir nuevas partículas aumenta con el cuadrado de la energía en reposo de la partícula que esperamos producir. Esto es, para producir una partícula que contenga el décuplo de la energía en reposo se requiere el céntuplo de la energía cinética y, por lo tanto, un acelerador que sea 100 veces más grande y más costoso. Sin embargo, si pudiéramos hacer la colisión en el marco del centro de masa, entonces las partículas con el décuplo de energía en reposo pueden ser producidas con el décuplo (y no el céntuplo) de energía cinética, puesto que las colisiones son 100% eficientes en la conversión de la energía cinética.

La generación actual de aceleradores de partículas incluye muchos ejemplos de tales dispositivos para *haces en colisión*. En el Stanford Linear Accelerator Center (SLAC), de California, se llevan a cabo colisiones de haces de electrones y positrones (antielectrones) de 50 GeV cada una (Fig. 18), y en el Fermi National Accelerator Laboratory, de Illinois, circulan haces de protones y antiprotones de 1000 GeV (1 TeV) en un mismo anillo en direcciones opuestas intersecándose una vez en cada circuito (Fig. 19). Por supuesto, la reacción es la misma sin importar el marco de referencia desde el que se vean, pero la interpretación será diferente.

Hasta aquí hemos estudiado solamente las colisiones unidimensionales en el marco del centro de masa. La colisión elástica bidimensional adopta también una estructura más simétrica cuando se la ve desde el marco de referencia del centro de masa. De nuevo, consideramos que m_2 está inicialmente en reposo en el laboratorio. En este caso, no desarrollaremos el álgebra, que es un tanto más complicada que en el caso unidimensional; en cam-

bio, mostramos en la figura 20 una descripción gráfica de la colisión del centro de masa. Como en el caso unidimensional, la velocidad de cada partícula queda reflejada principalmente en la colisión. La única diferencia aquí consiste es que las dos partículas se mueven después de la colisión a lo largo de una línea que es, en general, diferente del eje de las velocidades iniciales. La simetría requiere que los ángulos formados por las velocidades finales con las velocidades incidentes sean los mismos para ambas partículas; cuando las transformamos de nuevo al marco del laboratorio, se convierten en los ángulos generalmente desiguales ϕ_1 y ϕ_2 de la figura 12.

10-7 PROCESOS DE DESINTEGRACIÓN ESPONTÁNEA (Opcional)

De más de las 2000 especies de núcleos atómicos que han sido identificadas hasta ahora, la mayoría son inestables y, tarde o temprano, eliminan toda o parte de la energía en exceso descomponiéndose en dos o más partes. La vida media de tales procesos de *desintegración radiactiva* varía desde miles de millones de años (por ejemplo, para el ^{238}U) hasta fracciones de segundo muy pequeñas. Todas estas desintegraciones ocurren *espontáneamente*. Esto es, en una muestra dada de material radiactivo que contenga un gran número (quizás 10^{20}) de núcleos, podemos calcular con precisión cuántos de ellos se desintegrarán durante cualquier intervalo de tiempo determinado, pero no hay manera alguna de predecir qué núcleo en particular se desintegrará.

Los átomos, como los que forman el gas en una lámpara fluorescente, pueden también existir en estados con exceso de energía y pueden consolidarse en una configuración estable emitiendo (de nuevo espontáneamente, para el caso de un átomo aislado) un cuanto de radiación. Las partículas elementales, formadas en colisiones protón-protón en un acelerador de alta energía, pueden también desintegrarse espontáneamente, transformándose en otras partículas (véase la Fig. 4). Las desintegraciones espontáneas de algunas de estas partículas ocurren en forma tan rápida (10^{-20} s para la partícula J/ψ , por ejemplo) que la única evidencia que tenemos de su existencia es la observa-

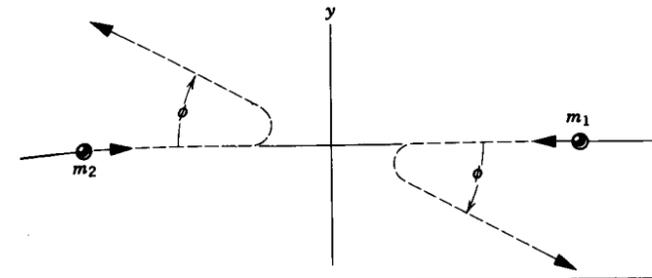
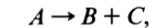


Figura 20 Colisión elástica bidimensional vista desde el marco de referencia del centro de masa. En este marco las partículas deben moverse en direcciones opuestas, de modo que cada una se desvíe según el mismo ángulo ϕ .

ción de los productos de la desintegración sometidos a condiciones que favorezcan la formación de la partícula.

En esta sección estudiaremos las desintegraciones espontáneas de la forma



donde A es la partícula que se desintegra y B y C son los productos de la desintegración. Solemos observar tales desintegraciones en el laboratorio desde un marco de referencia en el que A está en reposo. La desintegración $A \rightarrow B + C$ es, por lo tanto, simplemente la inversa de la colisión totalmente inelástica $B + C \rightarrow A$ vista desde el marco de referencia del centro de masa, como en la figura 17b. De hecho, nos formamos una buena imagen mental del proceso de desintegración haciendo que el tiempo vaya hacia atrás en la figura 17b; léase desde la parte inferior a la superior e inviertase la dirección de los vectores de velocidad.

En una colisión completamente inelástica, la energía cinética de las partículas en colisión se “pierde” en la colisión. Por supuesto, la energía total deberá conservarse, de modo que la energía cinética “perdida” debe aparecer en el sistema compuesto en otra forma, en la que la observamos como una contribución a la energía en reposo del sistema compuesto, como habíamos explicado en la sección 8-7. En un proceso de desintegración sucede lo contrario: la energía en reposo de A se convierte en energía cinética de B y C . Por lo tanto, podemos escribir la conservación de energía en un proceso de desintegración como:

$$E_A = E_B + E_C$$

$$m_A c^2 + K_A = (m_B c^2 + K_B) + (m_C c^2 + K_C), \quad (40)$$

con la energía total E de cada partícula dada como la suma de su energía en reposo mc^2 y su energía cinética K . Hemos escrito la ecuación 40 en el caso más general incluyendo la posibilidad de que A se mueva con energía cinética K_A cuando se desintegra; usualmente consideramos el caso cuando $K_A = 0$.

Podemos reescribir la ecuación 40 agrupando los términos de la energía en reposo en un lado y los términos de la energía cinética en el otro:

$$m_A c^2 - m_B c^2 - m_C c^2 = K_B + K_C - K_A. \quad (41)$$

Definimos Q , la energía liberada en la desintegración, como la diferencia entre la energía en reposo inicial $m_A c^2$ y la energía en reposo final $m_i c^2$:

$$Q = m_A c^2 - m_i c^2, \quad (42)$$

que en nuestro caso se convierte en

$$Q = (m_A - m_B - m_C)c^2 \quad (43)$$

o, usando la ecuación 41,

$$Q = K_B + K_C - K_A. \quad (44)$$

Esto es, Q es igual a la ganancia neta de energía cinética de los productos de la desintegración. Si A se desintegra en reposo, entonces Q es la energía cinética total de los productos de la desintegración.

El proceso de desintegración debe conservar el ímpetu lineal. Si A está en reposo, el ímpetu inicial total es cero, por lo que el ímpetu final será cero:

$$p_i = p_f$$

$$0 = p_B - p_C. \quad (45)$$

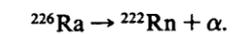
Las ecuaciones 44 (con $K_A = 0$) y 45 proporcionan dos ecuaciones con dos incógnitas que pueden resolverse para las energías o ímpetus de los productos B y C de la desintegración. Los resultados, en el caso en que ni B ni C tengan una energía en reposo nula, son

$$K_B = Q \frac{m_C}{m_B + m_C}, \quad (46)$$

$$K_C = Q \frac{m_B}{m_B + m_C}. \quad (47)$$

En muchos procesos de desintegración que se estudian en el laboratorio, una de las partículas producto, digamos B , tiene una energía en reposo mucho menor que la otra, de modo que $m_B < m_C$. Por ejemplo, B podría ser un electrón (energía en reposo = 0.511 MeV) o una partícula alfa (energía en reposo = 3727 MeV), mientras que C podría ser un átomo pesado o un núcleo (energía en reposo = 10^5 MeV, típicamente). A menudo es esta partícula, más ligera, la observada en el experimento. En este caso, como lo muestran las ecuaciones 46 y 47, $K_B \approx Q$ y $K_C \ll K_B$. Nótese que, si bien las energías cinéticas de las dos partículas son completamente diferentes, las magnitudes de sus ímpetus (dirigidos en sentido opuesto) permanecen exactamente iguales, como nos lo pide la ecuación 45. En este caso, a menudo nos referimos al *ímpetu de reculada* o *energía (cinética) de reculada* de C , como si C fuese un cañón pesado que recula después de haber disparado una bala liviana B , como en el problema muestra 7 del capítulo 9.

Problema muestra 6 Consideremos la emisión de partículas alfa, que son núcleos de los átomos de helio, en la desintegración del elemento radiactivo radio (^{226}Ra), que se encuentra en estado natural, al elemento gaseoso radón (^{222}Rn):



Si el ^{226}Ra se desintegra en reposo, halle las energías cinéticas de los productos.

Solución Las masas atómicas son:

$$^{226}\text{Ra}: 226.025403 \text{ u}; \quad ^{222}\text{Rn}: 222.017571 \text{ u};$$

$$\alpha: 4.002603 \text{ u}.$$

Podemos calcular Q según la ecuación 43, usando el valor de $c^2 = 932 \text{ MeV/u}$:

$$\begin{aligned} Q &= [m(^{226}\text{Ra}) - m(^{222}\text{Rn}) - m(\alpha)]c^2 \\ &= (226.025403 \text{ u} - 222.017571 \text{ u} \\ &\quad - 4.002603 \text{ u})(932 \text{ MeV/u}) \\ &= 4.87 \text{ MeV}. \end{aligned}$$

Las energías cinéticas pueden entonces calcularse a partir de las ecuaciones 46 y 47:

$$K_{\text{Rn}} = (4.87 \text{ MeV}) \frac{4.002603 \text{ u}}{222.017571 \text{ u} + 4.002603 \text{ u}} = 0.09 \text{ MeV},$$

$$K_{\alpha} = (4.87 \text{ MeV}) \frac{222.017571 \text{ u}}{222.017571 \text{ u} + 4.002603 \text{ u}} = 4.78 \text{ MeV}.$$

Nótese que, como lo pide la ecuación 44 (con $K_{\alpha} = 0$), las dos energías cinéticas suman Q ; nótese también que la partícula alfa, más ligera, absorbe la mayoría de la energía (aunque no toda): alrededor del 98% en este caso. ■

PREGUNTAS

1. Explique cómo se aplica la conservación del ímpetu a una pelota que rebota en la pared en un frontón.
2. ¿Puede ser cero el impulso de una fuerza, aunque la fuerza no sea de cero? Explique por qué o por qué no.
3. La figura 21 muestra un aparato de feria popular, en el cual el jugador trata de ver qué tan alto puede elevar un peso marcador al golpear un blanco con un mazo. ¿Qué cantidad física mide el aparato? ¿Es la fuerza promedio, la fuerza máxima, el trabajo realizado, el impulso, la energía transferida, el ímpetu transferido, o cualquier otra cosa? Explique la respuesta.



Figura 21 Pregunta 3.

4. Aunque la aceleración de una bola de béisbol, después de haber sido golpeada, no depende de quién la golpeó, algo con respecto al vuelo de la bola debe depender del bateador. ¿Qué es?

5. Explique cómo la bolsa de aire protectora de un automóvil puede ayudar a proteger al pasajero de una lesión grave en el caso de un choque.
6. Se dice que, durante una colisión a 30 mi/h, un niño de 10 lb puede ejercer una fuerza de 300 lb contra el brazo de un adulto que trate de tomar al niño de la mano. ¿Cómo puede esa fuerza ser tan grande?
7. Comente las siguientes afirmaciones: En la colisión de un automóvil, la fuerza que el auto ejerce al detenerse puede determinarse ya sea por su ímpetu o por su energía cinética. En un caso se necesita también el tiempo de frenado y en el otro la distancia de frenado.
8. El acero es más elástico que el hule. Explique qué significa esto.
9. Explique la posibilidad de que todas las colisiones fueran elásticas, si pudiéramos tener en cuenta solamente los movimientos internos de los átomos en los objetos.
10. Si (solamente) dos partículas colisionan, ¿estaremos forzados a recurrir a una descripción tridimensional para describir el suceso? Explique.
11. Hemos visto que la conservación del ímpetu puede aplicarse tanto si la energía cinética se conserva como si no. ¿Qué sucede en caso contrario; esto es, ¿implica la conservación de la energía cinética la conservación del ímpetu en la física clásica? (Véase "Connection Between Conservation of Energy and Conservation of Momentum", por Carl G. Adler, *American Journal of Physics*, mayo de 1976, pág. 483).
12. La siguiente aseveración fue tomada de una hoja de examen: "La colisión entre dos átomos de helio es perfectamente elástica, de modo que el ímpetu se conserva". ¿Qué piensa usted de esta afirmación?
13. Usted está conduciendo un automóvil por una carretera a 50 mi/h, seguido por otro auto que se mueve a la misma velocidad. Usted decelera a 40 mi/h pero el otro conductor no lo hace y chocan. ¿Cuáles son las velocidades iniciales de los autos en colisión vistas desde el marco de referencia de (a) usted mismo, (b) el otro conductor, y (c) un policía de tránsito que está dentro de un auto patrulla estacionado a un lado de la carretera? (d) Un juez le pregunta si fue usted quien chocó contra el otro conductor

o fue el otro conductor quien chocó contra usted. Como físico, ¿cuál sería su respuesta?

14. C. R. Daish escribió que, entre los golfistas profesionales, la velocidad inicial de la pelota al dejar la cabeza del palo es de alrededor de 140 mi/h. Él dice también: (a) "si con el edificio del Empire State (de 300 m de altura) se pudiera golpear a la bola a la misma velocidad que la cabeza del palo, la velocidad inicial de la bola aumentaría únicamente alrededor del 2%" y (b) que, una vez que el golfista ha iniciado su golpe, el disparo de una cámara fotográfica, un estornudo, etc. no ejercerán efecto alguno en el movimiento de la pelota. ¿Puede usted dar argumentos cualitativos que apoyen estas dos afirmaciones?
15. Al revisar las ecuaciones 12 y 13 resulta obvio que una solución válida al problema de hallar las velocidades finales de dos partículas en una colisión elástica unidimensional es $v_{1f} = v_{1i}$ y que $v_{2f} = v_{2i}$. ¿Qué significa esto físicamente?
16. Dos bolas de arcilla de igual masa y velocidad chocan entre sí de frente, se pegan, y llegan al reposo. La energía cinética ciertamente no se conserva. ¿Qué pasó con ella? ¿Cómo se conserva el ímpetu?
17. Un jugador de fútbol americano, momentáneamente en reposo sobre el campo, cacha una pelota cuando es tacleado por un corredor del equipo contrario. Ésta es, ciertamente, una colisión (inelástica!) y el ímpetu debe conservarse. En el marco de referencia del campo de fútbol, existe un ímpetu antes de la colisión pero parece no existir ninguno después de la colisión. ¿Realmente se conserva el ímpetu lineal? De ser así, explique cómo. Si no, explique por qué.
18. Considérese una colisión elástica unidimensional entre un objeto A en movimiento y un objeto B inicialmente en reposo. ¿Cómo elegiría usted la masa de B , en comparación con la de A , con objeto de que B recule con (a) la mayor velocidad, (b) el mayor ímpetu, y (c) la mayor energía cinética?
19. Dos bloques cúbicos idénticos, que se mueven en la misma dirección a una velocidad común v , chocan con un tercero estando este bloque inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin fricción. ¿Cuál es el movimiento de los bloques después de la colisión? Importa si los dos bloques, inicialmente en movimiento, estaban o no en contacto? ¿Importaría si estos dos bloques estuvieran pegados entre sí? Suponga que las colisiones son (a) completamente inelásticas o (b) elásticas.

20. ¿Cómo diseñaría usted un arma que no recule?
21. En una colisión entre dos cuerpos en el marco de referencia del centro de masa los ímpetus de las partículas son iguales y opuestos entre sí, tanto antes como después de la colisión. ¿Es la línea del movimiento relativo necesariamente la misma después de la colisión que antes? ¿En qué condiciones aumentarían las magnitudes de las velocidades de los cuerpos?, ¿en cuáles disminuirían o permanecerían iguales como resultado de la colisión?
22. Un reloj de arena está siendo pesado en una báscula sensible, primero cuando la arena está cayendo en una corriente continua desde la parte superior a la inferior, y luego nuevamente después de que la parte superior se ha vaciado. ¿Son los dos pesos iguales o no? Explique su respuesta.
23. Dé una explicación razonable del rompimiento de tableros de madera o de ladrillos por un golpe de karate. (Véase "Karate Strikes", por Jearl D. Walker, *American Journal of Physics*, octubre de 1975, pág. 845.)
24. Una caja en la que se ha hecho el vacío está en reposo sobre una mesa sin fricción. Usted perfora un pequeño orificio en una cara de modo que pueda entrar el aire (véase la Fig. 22). ¿Cómo se moverá la caja? ¿Qué argumento ha utilizado usted para llegar a la respuesta?

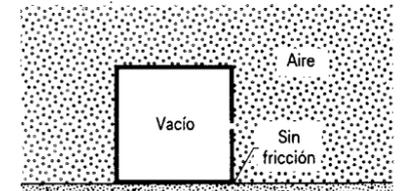


Figura 22 Pregunta 24.

25. Al comentar el hecho de que la energía cinética no se conserva en una colisión totalmente inelástica, un estudiante observó que la energía cinética no se conserva en una explosión y que una colisión totalmente inelástica es en esencia lo contrario a una explosión. ¿Es ésta una observación útil o válida?
26. ¿En qué condiciones, de ser necesaria alguna, es correcto decir que la desintegración $A \rightarrow B + C$ es simplemente lo contrario a la colisión $B + C \rightarrow A$ totalmente inelástica?

PROBLEMAS

Sección 10-3 Conservación del ímpetu durante las colisiones

1. Está siendo probado el parachoques de un automóvil nuevo. Se hace que el vehículo de 2300 kg, que se mueve 15 m/s, choque contra el pilar de un puente, y se lleve al

reposo en un tiempo de 0.54 s. Halle la fuerza promedio que actúa en el automóvil durante el impacto.

2. Una pelota de masa m y velocidad v choca contra una pared perpendicularmente y rebota a la misma velocidad. (a) Si el tiempo de la colisión es Δt , ¿cuál es la fuerza

promedio ejercida por la pelota en la pared? (b) Evalúe esta fuerza promedio numéricamente para una pelota de hule con masa de 140 g que se mueva 7.8 m/s; la duración de la colisión es de 3.9 ms.

- Un chorro de agua choca contra un álabe de turbina estacionario en forma de plato, como se muestra en la figura 23. La velocidad del agua es u , tanto antes como después del choque contra la superficie curvada del álabe, y la masa de agua que choca contra el álabe por unidad de tiempo es constante y de valor μ . Halle la fuerza ejercida por el agua sobre el álabe.

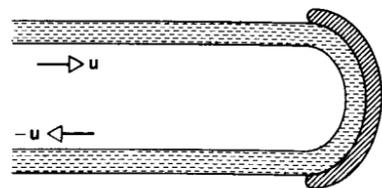


Figura 23 Problema 3.

- La nave espacial *Voyager 2* (de masa m y velocidad v con relación al Sol) se acerca al planeta Júpiter (de masa M y velocidad V con relación al Sol) como se muestra en la figura 24. La nave espacial rodea al planeta y sale en dirección opuesta. ¿Cuál es su velocidad, con relación al Sol, después de este encuentro de "latigazo"? Supóngase que $v = 12$ km/s y $V = 13$ km/s (la velocidad orbital de Júpiter). La masa de Júpiter es muchísimo más grande que la masa de la nave espacial; $M \gg m$. (Véase "The Slingshot Effect: Explanation and Analogies", por Albert A. Bartlett y Charles W. Hord, *The Physics Teacher*, noviembre de 1985, pág. 466.)

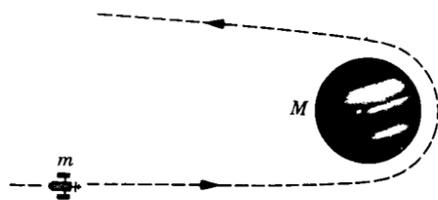


Figura 24 Problema 4.

- Un golfista golpea una pelota de golf, impartándole una velocidad inicial de 52.2 m/s de magnitud dirigida a 30° sobre la horizontal. Suponiendo que la masa de la pelota sea de 46.0 g y que el palo y la bola estén en contacto durante 1.20 ms, halle (a) el impulso impartido a la pelota, (b) el impulso impartido al palo, (c) la fuerza promedio ejercida en la pelota por el palo, y (d) el trabajo efectuado sobre la pelota.
- Un automóvil de 1420 kg que se mueve a razón de 5.28 m/s está viajando inicialmente hacia el norte. Después de completar una curva de 90° hacia la derecha en 4.60 s, el conductor distraído lo dirige contra un árbol, el cual

detiene al auto en 350 ms. ¿Cuál es la magnitud del impulso transmitido al auto (a) durante la curva, y (b) durante la colisión? ¿Qué fuerza promedio actúa en el auto (c) durante la curva y (d) durante la colisión?

- Una bola de béisbol de 150 g (peso = 5.30 oz) lanzada a una velocidad de 41.6 m/s (= 136 ft/s) es bateada directamente hacia el lanzador a una velocidad de 61.5 m/s (= 202 ft/s). El bate estuvo en contacto con la bola durante 4.70 ms. Halle la fuerza promedio ejercida por el bate sobre la bola.
- Una fuerza que promedia 984 N es aplicada a una bola de acero de 420 g que se mueve a razón de 13.8 m/s a causa de una colisión de 27.0 ms de duración. Si la fuerza está en dirección opuesta a la velocidad inicial de la bola, halle la velocidad final de la bola.
- Una bola de 325 g a una velocidad v de 6.22 m/s golpea una pared con un ángulo de 33.0° y luego rebota con la misma velocidad y ángulo (Fig. 25). Está en contacto con la pared durante 10.4 ms. (a) ¿Qué impulso experimentó la bola? (b) ¿Cuál fue la fuerza promedio ejercida por la bola contra la pared?

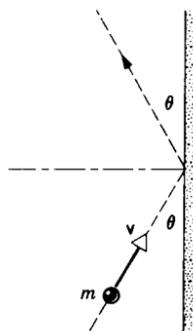


Figura 25 Problema 9.

- La figura 26 muestra una representación aproximada de la fuerza contra el tiempo durante la colisión de una pelota de tenis de 58 g contra una pared. La velocidad inicial de la pelota es de 32 m/s perpendicular a la pared; rebota a la misma velocidad, también perpendicular a la pared. ¿Cuál es el valor de $F_{\text{máx}}$, el valor máximo de la fuerza de contacto durante la colisión?
- Una sonda espacial no tripulada de 2500 kg se mueve en línea recta a una velocidad constante de 300 m/s. Uno de los motores de un cohete de la sonda espacial ejecuta una combustión en la cual actúa un empuje de 3000 N durante 65.0 s. (a) ¿Cuál es el cambio del ímpetu (magnitud solamente) de la sonda cuando el empuje es hacia atrás, hacia adelante, o hacia un lado? (b) ¿Cuál es el cambio en la energía cinética bajo las mismas tres condiciones? Supóngase que la masa del combustible expulsado sea despreciable comparada con la masa de la sonda espacial.
- Una fuerza ejerce un impulso J sobre un objeto de masa m , cambiando su velocidad de v a u . La fuerza y el movimiento del objeto están a lo largo de la misma línea

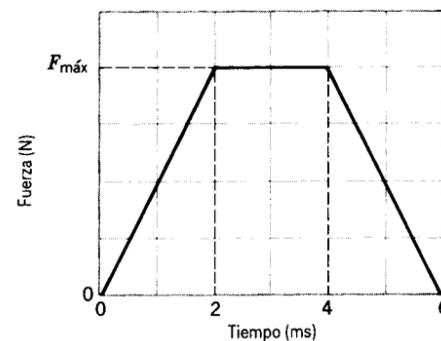


Figura 26 Problema 10.

recta. Demuestre que el trabajo efectuado por la fuerza es de $\frac{1}{2}J(u + v)$.

- Dos partes de un vehículo espacial se separan al detonar los pernos explosivos que las mantiene juntas. Las masas de las partes son de 1200 kg y 1800 kg; la magnitud del impulso transmitido a cada parte es de $300 \text{ N} \cdot \text{s}$. ¿Cuál es la velocidad relativa de retroceso de las dos partes?
- Una pelota de croquet con una masa de 0.50 kg es golpeada con un mazo, recibiendo el impulso mostrado en la gráfica (Fig. 27). ¿Cuál es la velocidad de la pelota justo después de que la fuerza llega a ser cero?

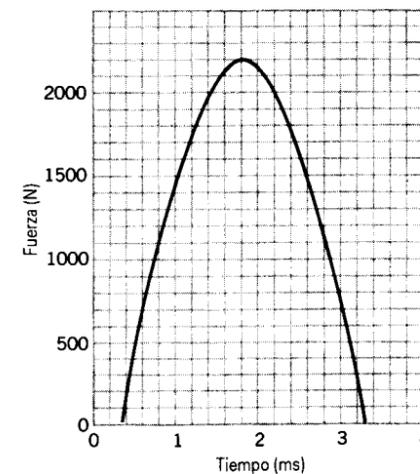


Figura 27 Problema 14.

- Es bien sabido que las balas y otros proyectiles disparados contra Superman simplemente rebotan en su pecho como se muestra en la figura 28. Supóngase que un *gangster* dispara contra el pecho de Superman balas de 3 g a razón de 100 balas/min, siendo la velocidad de cada bala de 500 m/s. Supóngase también que las balas rebotan directamente hacia atrás sin cambiar la velocidad. Demuestre que la fuerza promedio ejercida por la ráfaga de balas sobre el pecho de Superman es de 5.0 N (= 18 oz) solamente.



Figura 28 Problema 15.

- Un experto en karate rompe un tablero de pino de 2.2 cm de espesor con un golpe seco de su mano. Una fotografía estroboscópica demuestra que la mano, cuya masa puede considerarse como de 540 g, golpea la parte superior del tablero con una velocidad de 9.5 m/s y llega al reposo 2.8 cm por debajo de este nivel. (a) ¿Cuál es la duración de tiempo del golpe de karate (suponiendo una fuerza constante)? (b) ¿Qué fuerza promedio fue aplicada?
- Un rifle de perdigones dispara 10 perdigones de 2.14 g por segundo con una velocidad de 483 m/s. Los perdigones chocan contra una pared rígida. (a) Halle el ímpetu de cada perdigón. (b) Halle la energía cinética de cada perdigón. (c) Calcule la fuerza promedio ejercida por la ráfaga de perdigones sobre la pared. (d) Si cada perdigón está en contacto con la pared durante 1.25 ms, ¿cuál es la fuerza promedio ejercida en la pared por cada perdigón mientras está en contacto? ¿Por qué es esto tan diferente de (c)?
- Durante una gran tormenta caen granizos del tamaño de canicas (diámetro = 1.0 cm) a una velocidad de 25 m/s. Se estima que caen 120 granizos por metro cúbico de aire. Desprecie el rebote del granizo al chocar. (a) ¿Cuál es la masa de cada granizo? (b) ¿Qué fuerza es ejercida por el granizo sobre un techo plano de 10 m x 20 m durante la tormenta? Supóngase que, siendo hielo, 1.0 cm³ de granizo tienen una masa de 0.92 g.
- Supóngase que las hélices de un helicóptero empujan verticalmente hacia abajo la columna cilíndrica de aire que barren al girar. La masa total del helicóptero es de 1820 kg y la longitud de las hélices es de 4.88 m. Halle la potencia mínima necesaria para mantener al helicóptero en el aire. Supóngase que la densidad del aire es de 1.23 kg/m³.
- Una cadena uniforme muy flexible de masa M y longitud L está suspendida de un extremo de modo que cuelga verticalmente, y su extremo inferior toca apenas la superficie de una mesa. El extremo superior se suelta súbitamente de modo que la cadena cae sobre la mesa y se enreda

formando un pequeño montón, llegando cada eslabón al reposo en el instante en que alcanza a la mesa; véase la figura 29. Halle la fuerza ejercida por la mesa sobre la cadena en todo momento, en función del peso de la cadena que ya está sobre la mesa en ese ímpetu.

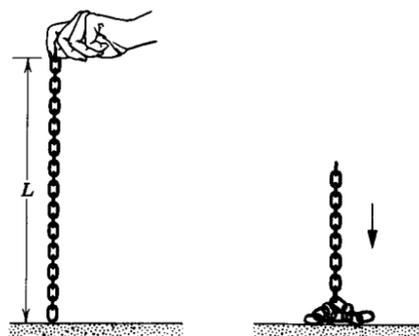


Figura 29 Problema 20.

Sección 10-4 Colisiones en una dimensión

21. Los bloques de la figura 30 se deslizan sin fricción. (a) ¿Cuál es la velocidad v del bloque de 1.6 kg después de la colisión? (b) ¿Es la colisión elástica?

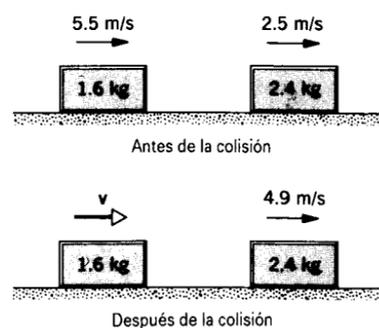


Figura 30 Problemas 21 y 22.

22. Refiérase a la figura 30. Suponga que la velocidad inicial del bloque de 2.4 kg se invierte; se dirige directamente hacia el bloque de 1.6 kg. (a) ¿Cuál será la velocidad v del bloque de 1.6 kg después de la colisión? (b) ¿Sería esta colisión elástica?
23. Un elefante furioso embiste a razón de 2.1 m/s contra una mosca que revolotea. Suponiendo que la colisión sea elástica, ¿a qué velocidad rebota la mosca? Nótese que el proyectil (el elefante) es mucho más masivo que el blanco (la mosca).
24. Dos esferas de titanio se aproximan una a la otra frontalmente a la misma velocidad y chocan elásticamente. Después de la colisión una de las esferas, cuya masa de 300 g, permanece en reposo. ¿Cuál es la masa de la otra esfera?

25. Una bala de 4.54 g de masa se dispara horizontalmente contra un bloque de madera de 2.41 kg en reposo sobre una superficie horizontal. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es de 0.210. La bala llega al reposo dentro del bloque, el cual se mueve 1.83 m. (a) ¿Cuál es la velocidad del bloque inmediatamente después de que la bala llega al reposo dentro de él? (b) ¿Cuál es la velocidad de la bala?
26. Un carrito de 342 g de masa que se mueve sobre una pista lineal sin fricción a una velocidad inicial de 1.24 m/s choca contra otro carrito de masa desconocida que está en reposo. La colisión entre los carritos es elástica. Después de la colisión, el primer carrito continúa en su dirección original a 0.636 m/s. (a) ¿Cuál es la masa del segundo carrito? (b) ¿Cuál es su velocidad después del impacto?
27. Se cree que el Meteor Crater, en Arizona (véase la Fig. 31), se formó por el impacto de un meteorito con la Tierra hace unos 20,000 años. La masa del meteorito se calcula que fue de 5×10^{10} kg y su velocidad en 7.2 km/s. ¿Qué velocidad impartiría a la Tierra tal meteorito en una colisión frontal?

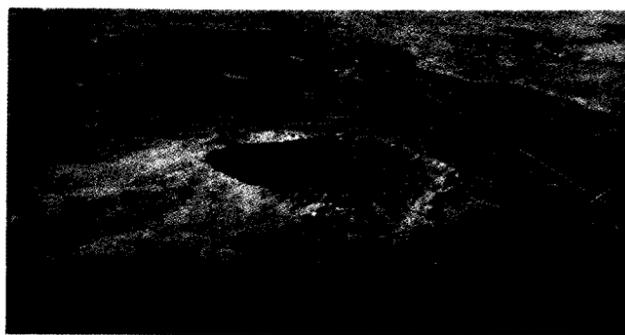


Figura 31 Problema 27.

28. Una bala de 5.18 g que se mueve a 672 m/s golpea un bloque de madera de 715 g que está en reposo sobre una superficie sin fricción. La bala sale con su velocidad reducida a 428 m/s. Halle la velocidad resultante del bloque.
29. Un objeto de 2.0 kg de masa choca elásticamente contra otro objeto en reposo y continúa moviéndose en la dirección original pero a un cuarto de su velocidad original. ¿Cuál es la masa del objeto golpeado?
30. En un arma de fuego antigua de retrocarga automática el mecanismo de recarga que está en la parte trasera del cañón se activa cuando el obturador, que recula después de disparar el arma, comprime a un resorte en una distancia d predeterminada. (a) Demuestre que la velocidad de la bala de masa m debe ser cuando menos $d\sqrt{kM/m}$ al disparar, para obtener la carga automática, donde k es la constante de fuerza del resorte y M es la masa del obturador. (b) ¿En qué sentido, si procede, puede considerarse este proceso como una colisión?
31. La cabeza de un palo de golf que se mueve a 45.0 m/s golpea una pelota de golf (masa = 46.0 g) que descansa

sobre el tee (punto donde se coloca la pelota). La masa efectiva de la cabeza del palo es de 220 g. (a) ¿A qué velocidad deja el tee la bola? (b) ¿A qué velocidad lo dejaría si se duplicara la masa de la cabeza del palo? ¿Y si se triplicara? ¿Qué conclusiones pueden sacarse del uso de palos pesados? Supóngase que las colisiones son perfectamente elásticas y que el golfista puede manejar los palos más pesados a igual velocidad en el impacto. Véase la pregunta 14.

32. Una bola de acero de 0.514 kg de masa está sujeta a un cordón de 68.7 cm de longitud del que se deja caer cuando el cordón está horizontal. En el fondo de su trayecto, la bola golpea un bloque de acero de 2.63 kg inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción (Fig. 32). La colisión es elástica. Halle (a) la velocidad de la bola y (b) la velocidad del bloque, ambos en el momento después de la colisión. (c) Suponga ahora que, durante la colisión, la mitad de la energía cinética mecánica se convierte en energía interna y en energía sónica. Halle las velocidades finales.

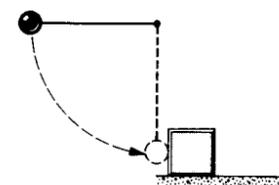


Figura 32 Problema 32.

33. Dos automóviles A y B patinan en una carretera helada cuando tratan de detenerse en un semáforo. La masa de A es de 1100 kg y la masa de B es de 1400 kg. El coeficiente de fricción cinética entre las ruedas trabadas de ambos autos y la carretera es de 0.130. El automóvil A logra llegar al reposo en el semáforo, pero el automóvil B no puede parar y choca con la parte trasera del automóvil A. Después de la colisión, A llega al reposo 8.20 m adelante del punto de impacto y B 6.10 m adelante: véase la figura 33. Ambos conductores tenían sus ruedas trabadas durante el incidente. (a) A partir de las distancias en que cada auto se movió después de la colisión, halle la velocidad de cada automóvil inmediatamente después del impacto. (b) Usando la conservación del ímpetu halle la velocidad con la cual el auto B golpeó al auto A. ¿Sobre qué base puede objetarse aquí el uso de la conservación del ímpetu?
34. Un peso de 2.9 ton que cae desde una distancia de 6.5 ft se hunde 1.5 in. en un montón de tierra de 0.50 ton. Suponiendo que la colisión peso-montón sea completamente inelástica, halle la fuerza promedio de resistencia ejercida por la tierra.
35. Un carro de carga del ferrocarril que pesa 35.0 ton choca contra un furgón que está estacionado. Se acoplan entre sí y el 27.0% de la energía cinética inicial se disipa como calor, sonido, vibraciones, etc. Halle el peso del furgón.
36. El parachoques de un automóvil de 1220 kg está diseñado para que pueda absorber precisamente toda la energía cuando el auto a 5.20 km/h choque de frente contra una

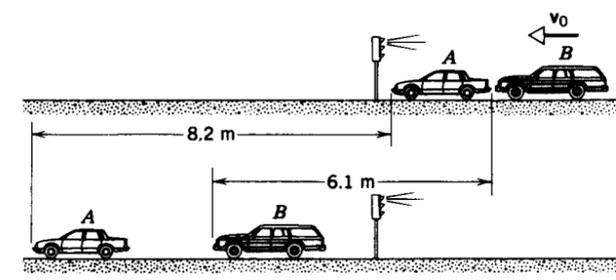


Figura 33 Problema 33.

- pared sólida de piedra. El automóvil sufre una colisión cuando corre a 75.5 km/h, chocando contra la parte trasera de un auto de 934 kg que va adelante y se mueve en la misma dirección a 62.0 km/h. El auto de 934 kg es acelerado a 71.3 km/h como resultado de la colisión. (a) ¿Cuál es la velocidad del auto de 1220 kg inmediatamente después del impacto? (b) ¿Cuál es la razón entre la energía cinética absorbida en la colisión y la que puede ser absorbida por el parachoques del auto de 1220 kg?
37. Un carro de carga de ferrocarril que pesa 31.8 ton y que viaja a 5.20 ft/s logra alcanzar a otro que pesa 24.2 ton y viaja a 2.90 ft/s en la misma dirección. (a) Halle las velocidades de los carros después de la colisión y la pérdida de energía cinética durante la colisión si los carros se acoplan entre sí. (b) Si en cambio, como es probable, la colisión es elástica, halle las velocidades de los carros después de la colisión.
38. Una báscula de plataforma está calibrada para indicar la masa en kilogramos de un objeto colocado sobre ella. Desde una altura de 3.5 m caen partículas que chocan con el platillo de la báscula. Las colisiones son elásticas; las partículas rebotan hacia arriba a la misma velocidad que tenían antes de chocar con el platillo. Cada partícula tiene una masa de 110 g y las colisiones ocurren a 42 s^{-1} . Halle la lectura de la escala.
39. Se coloca una caja sobre una báscula que está ajustada para que marque cero cuando la caja está vacía. Más tarde se vierte en la caja un montón de canicas desde una altura h desde el fondo de la caja a razón de R (canicas por segundo). Cada canica tiene una masa m . Las colisiones entre las canicas y la caja son completamente inelásticas. Halle la lectura que la báscula da del peso en el tiempo t después de que las canicas comiencen a llenar la caja. Encuentre una respuesta numérica cuando $R = 115 \text{ s}^{-1}$, $h = 9.62 \text{ m}$, $m = 4.60 \text{ g}$, y $t = 6.50 \text{ s}$.
40. Una bola de masa m se proyecta a una velocidad v_i en el cañón de una pistola de resorte de masa M inicialmente en reposo sobre una superficie sin fricción; véase la figura 34. La bola se pega en el cañón en el punto de máxima compresión del resorte. No se pierde energía por la fricción. (a) ¿Cuál es la velocidad de la pistola de resorte después de que la bola llega al reposo dentro del cañón? (b) ¿Qué fracción de la energía cinética inicial de la bola se almacena en el resorte?
41. Un bloque de masa $m_1 = 1.88 \text{ kg}$ se desliza a lo largo de una mesa sin fricción a una velocidad de 10.3 m/s. Direc-

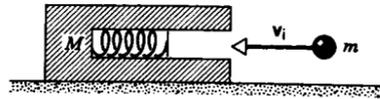


Figura 34 Problema 40.

tamente enfrente de él, y moviéndose en la misma dirección, está un bloque de masa $m_2 = 4.92 \text{ kg}$ que se mueve a razón de 3.27 m/s . Un resorte carente de masa con una fuerza constante de $k = 11.2 \text{ N/cm}$ está unido a la parte posterior de m_2 , como se muestra en la figura 35. Cuando los bloques chocan, ¿cuál es la máxima compresión del resorte? (Sugerencia: En el momento de compresión máxima del resorte, los dos bloques se mueven como uno solo; halle la velocidad observando que la colisión es completamente inelástica en este punto.)

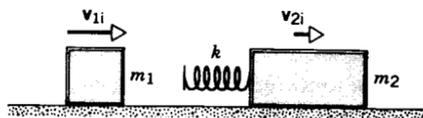


Figura 35 Problema 41.

42. Se colocan dos trineos de 22.7 kg separados por una distancia pequeña, uno atrás del otro, como se muestra en la figura 36. Un gato de 3.63 kg que está en uno de los trineos brinca al otro e inmediatamente se regresa al primero. Ambos brincos se efectúan a una velocidad de 3.05 m/s respecto al trineo donde el gato estaba en reposo cuando se efectuó el brinco. Halle las velocidades finales de los dos trineos.



Figura 36 Problema 42.

43. Un electrón, de masa m , choca de frente con un átomo, de masa M , inicialmente en reposo. Como resultado de la colisión, una cantidad característica de energía E se almacena dentro del átomo. ¿Cuál es la velocidad inicial mínima v_0 que el electrón deberá tener? (Sugerencia: Los principios de conservación conducen a una ecuación cuadrática para la velocidad final v del electrón y a una ecuación cuadrática para la velocidad final V del átomo. El valor mínimo v_0 se deduce del requerimiento de que el radical de las soluciones para v y V sea real.)

44. Las dos esferas de la derecha en la figura 37 están ligeramente separadas e inicialmente en reposo; la esfera de la izquierda choca contra la otra a una velocidad v_0 . Supo-



Figura 37 Problemas 44 y 45.

niendo colisiones elásticas de frente, (a) si $M \leq m$, demuestre que existen dos colisiones y halle todas las velocidades finales; (b) Si $M \geq m$, demuestre que existen tres colisiones y halle todas las velocidades finales.

45. Consideremos una situación como la del problema anterior (Fig. 37), pero en la cual las colisiones puedan ser ahora todas elásticas, todas inelásticas, o algunas elásticas y otras inelásticas; también, las masas son ahora $m, m',$ y M . Demuestre que para transferir de m a M la máxima energía cinética, el cuerpo intermedio debería tener una masa $m' = mM$, esto es, la media geométrica de las masas adyacentes. (Es interesante observar que esta misma relación existe entre las masas de capas sucesivas de aire en la bocina exponencial en acústica. (Véase "Energy Transfer in One-Dimensional Collisions of Many Objects", por John B. Hart y Robert B. Herrmann, *American Journal of Physics*, enero de 1968, pág. 46).)

Sección 10-5 Colisiones bidimensionales

46. Dos vehículos A y B viajan al oeste y al sur, respectivamente, hacia la misma intersección donde chocan y se traban entre sí. Antes de la colisión, A (con un peso de 2720 lb) se mueve a una velocidad de 38.5 mi/h y B (con un peso de 3640 lb) tiene una velocidad de 58.0 mi/h . Halle la magnitud y la dirección de la velocidad de los vehículos (trabados) inmediatamente después de la colisión.

47. Dos objetos, A y B , chocan. A tiene una masa de 2.0 kg , y B una masa de 3.0 kg . Las velocidades antes de la colisión son $\mathbf{v}_{1i} = 15\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$ y $\mathbf{v}_{2i} = -10\mathbf{i} + 5.0\mathbf{j}$. Después de la colisión, $\mathbf{v}_{1f} = -6.0\mathbf{i} + 30\mathbf{j}$. Todas las velocidades están dadas en metros por segundo. (a) ¿Cuál es la velocidad final de B ? (b) ¿Cuánta energía cinética se ganó o se perdió en la colisión?

48. Una partícula alfa choca con un núcleo de oxígeno, inicialmente en reposo. La partícula alfa se desvía en un ángulo de 64.0° respecto a su dirección inicial de movimiento y el núcleo de oxígeno recula formando un ángulo de 51.0° por debajo de su dirección inicial. La velocidad final del núcleo es de $1.20 \times 10^8 \text{ m/s}$. ¿Cuál es la velocidad final de la partícula alfa? (La masa de una partícula alfa es de 4.00 u y la masa de un núcleo de oxígeno es de 16.0 u .)

49. Demuestre que un neutrón lento (llamado *neutrón térmico*) que se dispersa en 90° en una colisión elástica con un deuterón, inicialmente en reposo, cede dos tercios de su energía cinética inicial al deuterón. (La masa de un neutrón es de 1.01 u ; la masa de un deuterón es de 2.01 u .)

50. Después de una colisión totalmente inelástica, se encuentra que dos objetos de la misma masa y velocidad inicial se mueven juntos a la mitad de su velocidad inicial. Halle el ángulo entre las velocidades iniciales de los objetos.

51. Un protón (masa atómica de 1.01 u) con una velocidad de 518 m/s choca elásticamente con otro protón en reposo. El protón original se dispersa a 64.0° de su dirección inicial. (a) ¿Cuál es la dirección de la velocidad del protón blanco después de la colisión? (b) ¿Cuáles son las velocidades de los dos protones después de la colisión?

52. Dos bolas A y B , que tienen masas diferentes pero desconocidas, chocan. A está inicialmente en reposo y B tiene una velocidad v . Después de la colisión, B tiene una velocidad de $v/2$ y se mueve en un ángulo recto con su movimiento original. (a) Halle la dirección en que se mueve la bola A después de la colisión. (b) ¿Puede usted determinar la velocidad de A a partir de la información dada? Explique.

53. En un juego de billar, se le da a una bola una velocidad inicial V y choca contra el montón de las 15 bolas estacionarias. Las 16 bolas sufren luego numerosas colisiones entre una y otra y entre ellas y la banda. Un tiempo después se observa que (por alguna casualidad) todas las bolas tienen la misma velocidad v . Suponiendo que todas las colisiones sean elásticas y despreciando el aspecto rotatorio del movimiento de las bolas, calcule v en función de V .

54. Dos péndulos, de longitud L cada uno, están inicialmente situados como se muestra en la figura 38. El primer péndulo se suelta desde una altura d y golpea al segundo. Suponga que la colisión es completamente inelástica y desprecie la masa de los cordones y cualesquier efectos de fricción. ¿A qué altura se eleva el centro de masa después de la colisión?

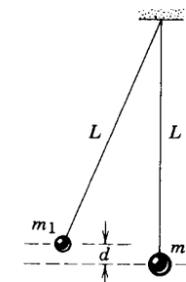


Figura 38 Problema 54.

55. Una barcaza de $1.50 \times 10^5 \text{ kg}$ de masa navega río abajo a 6.20 m/s envuelta en niebla densa cuando choca de costado contra otra barcaza que avanza en línea recta cruzando el río; véase la figura 39. La segunda barcaza tiene una masa de $2.78 \times 10^5 \text{ kg}$ y avanzaba a 4.30 m/s . Inmediatamente después del impacto, la segunda barcaza sufre una desviación de 18.0° en la dirección de la corriente y su velocidad aumenta a 5.10 m/s . La corriente del río era prácticamente nula en el momento del accidente. (a) ¿Cuáles son la velocidad y la dirección del movimiento de la primera barcaza inmediatamente después de la colisión? (b) ¿Cuánta energía cinética se perdió en la colisión?

56. Una bola a una velocidad inicial de 10.0 m/s choca elásticamente con dos bolas idénticas cuyos centros están en una línea perpendicular a la velocidad inicial e inicialmen-

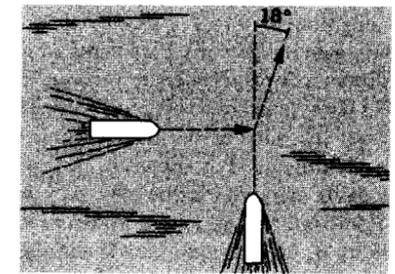


Figura 39 Problema 55.

te en contacto entre sí (Fig. 40). La primera bola se dirige directamente al punto de contacto y todas las bolas carecen de fricción. Halle las velocidades de las tres bolas después de la colisión. (Sugerencia: En ausencia de fricción, cada impulso se dirige a lo largo de la línea de los centros de las bolas, normal a las superficies que chocan.)

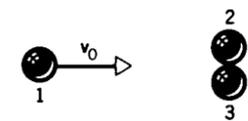


Figura 40 Problema 56.

57. En un juego de billar, el mingo golpea contra otra bola que inicialmente está en reposo. Después de la colisión, el mingo se mueve a razón de 3.50 m/s a lo largo de una línea que forma un ángulo de 65.0° con su dirección de movimiento original. La segunda bola adquiere una velocidad de 6.75 m/s . Usando la conservación del ímpetu, halle (a) el ángulo entre la dirección del movimiento de la segunda bola y la dirección original del movimiento del mingo y (b) la velocidad original del mingo.

58. En 1932 James Chadwick, en Inglaterra, demostró la existencia y propiedades del neutrón (una de las partículas fundamentales que forman el átomo) con el aparato que se muestra en la figura 41. En una cámara al vacío, una muestra de polonio radiactivo se desintegra produciendo partículas alfa (núcleos de helio). Estos núcleos chocan contra un bloque de berilo, induciendo un proceso por el cual se emiten neutrones. (En la reacción se combinan el He y el Be para formar carbono + neutrones estables.) Los neutrones chocan contra una capa delgada de parafina (CH_4), liberando núcleos de hidrógeno que son detectados en una cámara de ionización. En otras palabras, ocurre una colisión elástica en la que el ímpetu del neutrón se transfiere parcialmente al núcleo de hidrógeno. (a) Halle una expresión para la velocidad máxima v_H que puede alcanzar el núcleo de hidrógeno (de masa m_H). Asignemos a los neutrones entrantes una masa m_n y una velocidad v_n . (Sugerencia: ¿Se transferirá más energía en una colisión frontal o en una colisión oblicua?). (b) Una de las metas de Chadwick consistía en hallar la masa de su nueva partícula. La inspección de la expresión (a), que contiene este parámetro, sin embargo, muestra que están presentes

las dos incógnitas, v_n y m_n (v_H se conoce; puede medirse con la cámara de ionización). Para eliminar a la incógnita v_n , él sustituyó a la parafina con un bloque de paracianógeno (CN). Los neutrones sufrieron entonces colisiones elásticas con los núcleos de nitrógeno en lugar de los núcleos de hidrógeno. Por supuesto, la expresión (a) se cumple todavía si v_N se escribe para v_H y m_N se escribe para m_H . Por lo tanto, si v_H y v_N se miden en experimentos por separado, v_n puede ser eliminada entre las dos expresiones para el hidrógeno y el nitrógeno y dar un valor para m_n . Los valores de Chadwick fueron

$$v_H = 3.3 \times 10^9 \text{ cm/s,}$$

$$v_N = 0.47 \times 10^9 \text{ cm/s.}$$

¿Cuál es su valor para m_n ? ¿Cómo se compara éste con el valor admitido $m_n = 1.00867 \text{ u}$? (Haga que $m_H = 1.0 \text{ u}$, $m_N = 14 \text{ u}$).

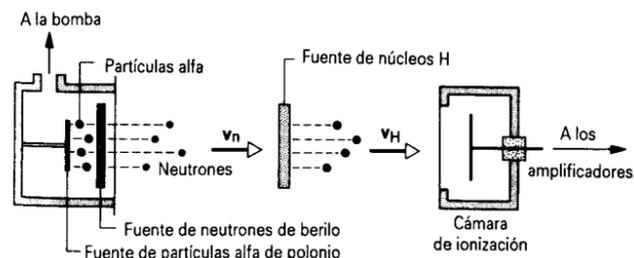


Figura 41 Problema 58.

59. Demuestre que, en el caso de una colisión elástica entre una partícula de masa m_1 con una partícula de masa m_2 inicialmente en reposo, (a) el ángulo máximo θ_m a través del cual puede ser desviada m_1 por la colisión, está dado por $\cos^2 \theta_m = 1 - m_2^2/m_1^2$, de modo que $0 \leq \theta_m \leq \pi/2$, cuando $m_1 > m_2$; (b) $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$, cuando $m_1 = m_2$; (c) θ_1 puede tener todos los valores entre 0 y π , cuando $m_1 < m_2$.

Sección 10-6 Marco de referencia del centro de masa

60. (a) Demuestre que en una colisión elástica unidimensional la velocidad del centro de masa de dos partículas, m_1 que se mueve a velocidad inicial v_{1i} y m_2 que se mueve a una velocidad inicial v_{2i} , es

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}.$$

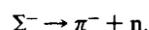
(b) Úsen las ecuaciones 15 y 16 para v_{1f} y v_{2f} , es decir, las velocidades de las partículas después de la colisión, para derivar el mismo resultado para v_{cm} después de la colisión.

61. En el laboratorio, una partícula de 3.16 kg de masa que se mueve a razón de 15.6 m/s hacia la izquierda colisiona con una partícula de 2.84 kg de masa que se mueve 12.2 m/s hacia la derecha. Halle la velocidad del centro de masa del sistema de dos partículas después de la colisión.

62. Una partícula de masa m_1 que se mueve a una velocidad v_{1i} choca de frente con m_2 , inicialmente en reposo, en una colisión perfectamente inelástica. (a) ¿Cuál es la energía cinética del sistema antes de la colisión? (b) ¿Cuál es la energía cinética del sistema después de la colisión? (c) ¿Qué fracción de la energía cinética original se perdió? (d) Sea v_{cm} la velocidad del centro de masa del sistema. Véase la colisión desde un marco de referencia preparado que se mueva con el centro de masa de modo que $v'_{1i} = v_{1i} - v_{cm}$, $v'_{2i} = -v_{cm}$. Repítanse las partes (a), (b) y (c), como las ve un observador situado en este marco de referencia. ¿Se pierde la misma cantidad de energía cinética en cada caso? Explique.

Sección 10-7 Procesos de desintegración espontánea

63. Una partícula llamada Σ^- , en reposo en cierto marco de referencia, se desintegra espontáneamente en dos partículas distintas de acuerdo con



Las masas son

$$m_\Sigma = 2340.5 m_e,$$

$$m_\pi = 273.2 m_e,$$

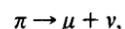
$$m_n = 1838.65 m_e,$$

donde m_e es la masa del electrón. (a) Halle la energía cinética total de los productos de la desintegración. (b) ¿Cuánta energía cinética obtiene cada producto de la desintegración?

64. Una partícula de masa m en reposo se desintegra espontáneamente en dos partículas de masa m_1 y m_2 con velocidades respectivas v_1 y v_2 . Demuestre que $m > m_1 + m_2$.

65. Cierta núcleo, en reposo, se desintegra espontáneamente en tres partículas. Dos de ellas son detectadas; sus masas y velocidades son las que se muestran en la figura 42. (a) ¿Cuál es el ímpetu de la tercera partícula, de la cual se sabe que tiene una masa de $11.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$? (b) ¿Cuánta energía cinética, en MeV, se genera en el proceso de desintegración?

66. Un pión en reposo se desintegra espontáneamente de acuerdo con el esquema



en el que μ representa a un muón (energía en reposo = 105.7 MeV) y ν a un neutrino (energía en reposo = 0). La energía cinética medida del muón es de 4.100 MeV.

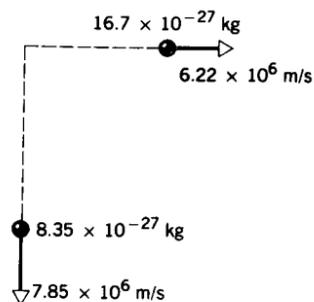


Figura 42 Problema 65.

(a) Halle el ímpetu del neutrino, en unidades MeV/c. (b) Calcule la energía de reposo del pión.

Proyecto para la computadora

67. Escriba un programa que describa la colisión elástica entre dos partículas de masas m_1 y m_2 y velocidades iniciales v_{1i}

y v_{2i} . El programa deberá aceptar valores numéricos de estas cuatro cantidades como datos de entrada y dar resultados con valores numéricos de las velocidades finales, v_{1f} y v_{2f} , y de v_{cm} , la velocidad del centro de masa. Use el programa para explorar todos los casos especiales que a usted se le ocurran, tales como $m_1 = m_2$, $m_1 \gg m_2$, $m_1 \ll m_2$, $v_{1i} \gg v_{2i}$, $v_{1i} = v_{2i}$, $v_{1i} = -v_{2i}$.

CAPÍTULO 11

CINEMÁTICA DE LA ROTACIÓN

Hasta aquí hemos estudiado solamente el movimiento de traslación de los objetos. Así, hemos considerado tanto los cuerpos rígidos (en los que todas sus partes están fijas unas entre sí) como los sistemas no rígidos (cuyas partes pueden moverse unas con relación a las otras).

El movimiento más general de un cuerpo rígido comprende tanto los movimientos de rotación como los de traslación. En el presente capítulo comenzaremos a considerar este movimiento general. Iniciaremos con la descripción de la rotación con sus variables apropiadas, relacionándolas entre sí; esto pertenece al ámbito de la cinemática de la rotación, que es el tema de este capítulo. En los dos capítulos siguientes estudiaremos las relaciones del movimiento de rotación con la interacción de un objeto y su entorno (dinámica de la rotación).

11-1 MOVIMIENTO DE ROTACIÓN

La figura 1 muestra una bicicleta de ejercicio fija. El eje de la rueda frontal al girar está fijo en el espacio; así, definiremos como z al eje de nuestro sistema de coordenadas. Un punto arbitrario P de la rueda está a una distancia r perpendicular al punto A en el eje z . Tracemos la línea AB de modo que pase por P desde A . El movimiento del punto P traza un arco de círculo cuando gira la rueda. No lo hace necesariamente a velocidad constante, pues quien

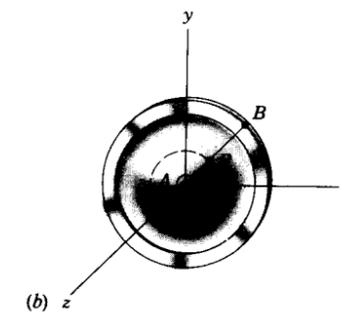
practica el ejercicio puede cambiar el ritmo al que está pedaleando.

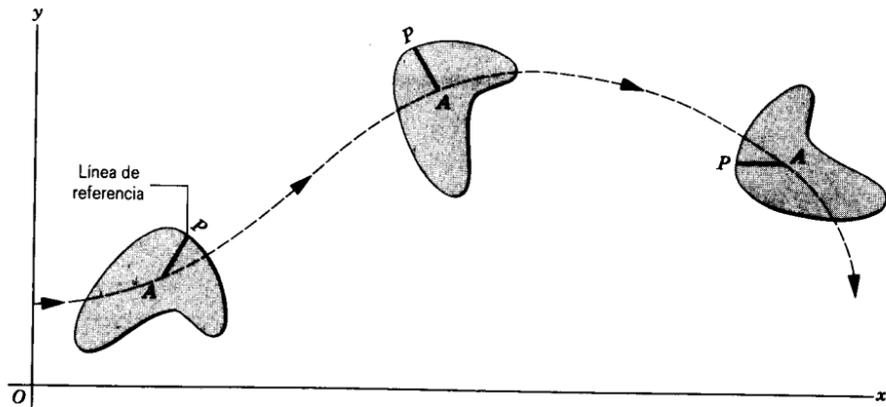
El movimiento de la rueda es un ejemplo de la *rotación pura de un cuerpo rígido*, que definiremos como sigue:

Un cuerpo rígido se mueve en rotación pura si cada punto del cuerpo (como P en la Fig. 1) se mueve en trayectoria circular. Los centros de estos círculos deben estar sobre una línea recta común llamada eje de rotación (el eje z de la Fig. 1).



Figura 1 (a) La rueda de una bicicleta de ejercicio fija es un ejemplo de la rotación pura de un cuerpo rígido. (b) Coordenadas utilizadas para describir la rotación de la rueda. El eje de rotación, que es perpendicular al plano de la figura, es el eje z . Un punto arbitrario P situado a la distancia r del eje A se mueve en un círculo de radio r .





Podemos también caracterizar el movimiento de la rueda por la línea de referencia AB en la figura 1. Al girar la rueda, la línea AB se mueve a través de un cierto ángulo en el plano xy . Otra manera de definir la rotación pura es la siguiente:

Un cuerpo rígido se mueve en rotación pura si una línea de referencia perpendicular al eje (como AB en la Fig. 1) se mueve a través del mismo ángulo en un intervalo de tiempo dado como cualquier otra línea de referencia perpendicular al eje del cuerpo.

En el caso de una rueda de bicicleta ordinaria, la línea AB podría representar uno de los rayos (tomado como radial) de la rueda. La definición anterior significa entonces que, para una rueda en rotación pura, si un rayo gira en un cierto ángulo $\Delta\phi$ en el intervalo de tiempo Δt , entonces cualquier otro rayo deberá también girar a través de $\Delta\phi$ durante ese mismo intervalo.

El movimiento general de un objeto rígido incluirá componentes de traslación y de rotación, como, por ejemplo, en el caso de una rueda de bicicleta *móvil*. El punto P en tal rueda se mueve en círculo de acuerdo con un observador en el mismo marco de referencia que la rueda (el corredor, por ejemplo); pero otro observador fijo en el suelo describiría el movimiento de manera diferente. En casos aún más complejos, como el de una pelota de fútbol que vuele bamboleándose, podemos tener una combinación de un movimiento de traslación, un movimiento de rotación con respecto a un eje, y una variación en la dirección del eje. En general, la descripción tridimensional de un cuerpo rígido requiere de seis coordenadas; tres para ubicar el centro de masa, dos ángulos (como la latitud y la longitud) para orientar el eje de rotación, y un ángulo para describir las rotaciones alrededor del eje. La figura 2 muestra un cuerpo rígido bidimensional arbitrario que experimenta movimientos de rotación y de traslación. En este caso sólo se necesitan tres coordenadas: dos para el centro de masa y una para la coordenada angular de una línea de referencia en el cuerpo.

Figura 2 Un cuerpo rígido arbitrario con ambos movimientos de rotación y de traslación. En este caso bidimensional especial, el movimiento de traslación se halla confinado al plano xy . La línea punteada muestra la trayectoria en el plano xy que corresponde al movimiento de traslación del eje de rotación, que es paralelo al eje z a través del punto A . El movimiento de rotación está indicado por la línea AP .

En el presente capítulo consideramos únicamente el movimiento de rotación pura. (En el capítulo siguiente se estudiará el caso más complicado de la rotación y la traslación combinadas.) Así, consideramos sólo objetos rígidos, en los que no existe movimiento relativo de las partes al girar el objeto; por lo tanto, el caso de un líquido dentro de un recipiente en rotación, por ejemplo, no lo estudiaremos ahora.

11-2 LAS VARIABLES DE LA ROTACIÓN

La figura 3a muestra un cuerpo de forma arbitraria que gira con respecto al eje z . Podemos decir exactamente del cuerpo completo en rotación dónde se encuentra éste dentro de nuestro marco de referencia, si conocemos la ubicación de un solo punto P del cuerpo en este marco. Así, para la cinemática de este problema, necesitamos considerar solamente el movimiento (bidimensional) de un punto situado en el círculo de radio r igual a la distancia perpendicular desde P hasta el punto A sobre el eje z . La figura 3b muestra una sección del cuerpo paralela al plano xy que incluye al punto P .

El ángulo ϕ en la figura 3b es la posición angular de la línea de referencia AP con respecto al eje x' . *Arbitrariamente elegimos como sentido positivo de la rotación el contrario al de las manecillas del reloj*, de modo que (en la Fig. 3b) ϕ aumenta para una rotación en sentido antihorario y disminuye para una rotación en el sentido de las manecillas, de acuerdo con un observador que esté más alejado a lo largo del eje positivo z que el objeto en rotación.

Es conveniente medir ϕ en radianes en lugar de medirlo en grados. Por definición ϕ está dado en radianes (rad) por la relación

$$\phi = s/r, \quad (1)$$

donde s es la longitud de arco que se muestra en la figura 3b.

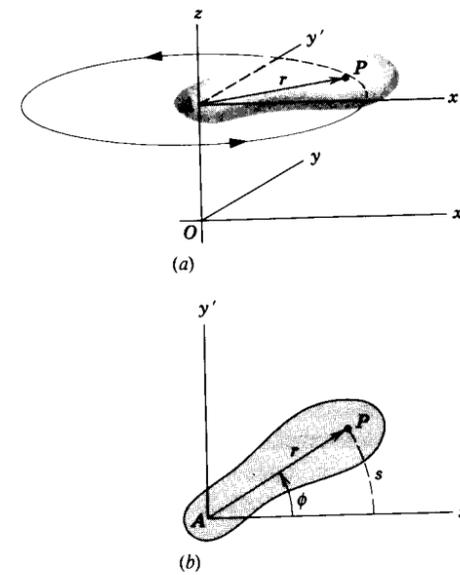


Figura 3 (a) Un cuerpo rígido arbitrario que gira en torno al eje z . (b) Corte de cuerpo en sección transversal. Los ejes x' y y' son paralelos a los ejes x y y , respectivamente, pero pasan por el punto A . La línea de referencia AP , que une un punto P del cuerpo con el eje, está ubicada instantáneamente a un ángulo ϕ con respecto al eje x' . El punto P se mueve a través de una longitud de arco s cuando la línea AP gira a través del ángulo ϕ .

El radián, por ser la razón de dos longitudes, es un número puro y no tiene dimensiones. Puede, por lo tanto, incluirse en las unidades que corresponden a las cantidades físicas, o puede desprejarse, según nos convenga.

Puesto que la circunferencia de un círculo de radio r es $2\pi r$, de la ecuación 1 se deduce que una partícula que se mueva en un arco de longitud igual a la circunferencia debe barrer un ángulo de 2π radianes. Así,

$$1 \text{ revolución} = 2\pi \text{ radianes} = 360^\circ,$$

o sea

$$1 \text{ radián} = 57.3^\circ = 0.159 \text{ revoluciones.}$$

Hagamos que el cuerpo de la figura 3b gire en sentido contrario a las manecillas del reloj. En el tiempo t_1 la posición angular de la línea AP es ϕ_1 , y en un tiempo t_2 más tarde su posición angular es ϕ_2 . Esto se muestra en la figura 4, la cual da las posiciones de P y de la línea de referencia en estos tiempos; por simplificación, hemos omitido el croquis del propio cuerpo.

El *desplazamiento angular* de P será $\phi_2 - \phi_1 = \Delta\phi$ durante el intervalo de tiempo $t_2 - t_1 = \Delta t$. Definimos a la *velocidad angular promedio* $\bar{\omega}$ de la partícula P en este intervalo de tiempo así:

$$\bar{\omega} = \frac{\phi_2 - \phi_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}. \quad (2)$$

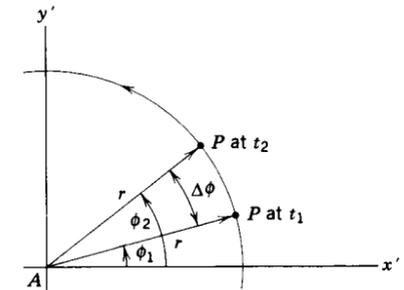


Figura 4 La línea de referencia AP de la figura 3b está en la coordenada angular ϕ_1 en el tiempo t_1 y en la coordenada angular ϕ_2 en el tiempo t_2 . En el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$, el desplazamiento angular neto es $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$.

La *velocidad angular instantánea* ω es el límite alcanzado por esta razón cuando Δt tiende a cero:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

o sea

$$\omega = \frac{d\phi}{dt}. \quad (3)$$

Para un cuerpo rígido en rotación pura, todas las líneas fijadas en él que sean perpendiculares al eje de rotación giran a través del mismo ángulo en el mismo tiempo, de modo que la velocidad angular ω alrededor de este eje es la misma para cada punto del cuerpo. Entonces ω es característica del cuerpo como un todo. La velocidad angular tiene las dimensiones de un tiempo inverso (T^{-1}); sus unidades pueden ser radianes/segundo (rad/s) o revoluciones/segundo (rev/s).

Si la velocidad angular de P no es constante, entonces el punto tiene una aceleración angular. Sean ω_1 y ω_2 las velocidades angulares instantáneas en los tiempos t_1 y t_2 , respectivamente; entonces, la *aceleración angular promedio* $\bar{\alpha}$ del punto P se define como

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \quad (4)$$

La *aceleración angular instantánea* es el límite de esta razón cuando Δt tiende a cero:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

o sea

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \quad (5)$$

Puesto que ω es la misma para todos los puntos de un cuerpo rígido, se deduce de la ecuación 5 que α debe ser la misma para cada punto, y entonces α , como ω , es una característica del cuerpo como un todo. La aceleración

angular tiene las dimensiones de un tiempo inverso al cuadrado (T^{-2}); sus unidades pueden ser radianes/segundo² (rad/s²) o revoluciones/segundo² (rev/s²).

En vez de la rotación de un cuerpo rígido, podíamos haber considerado el movimiento de una partícula aislada en una trayectoria circular. Esto es, P en la figura 4 puede representar a una partícula de masa m , obligada a moverse en un círculo de radio r (quizás sostenida por una barra rígida carente de masa de longitud r pivotada en el eje z). Todos los resultados derivados en esta sección son válidos ya sea que veamos a P como un punto matemático o como una partícula física; podríamos, por ejemplo, referirnos a la velocidad angular o a la aceleración angular de la partícula P mientras gira en torno al eje z . Más adelante hallaremos útil ver al cuerpo rígido en rotación de la figura 3 como un conjunto de partículas, cada una de las cuales está girando con respecto al eje z a la misma velocidad angular y a la misma aceleración angular.

La rotación de una partícula (o de un cuerpo rígido) con respecto a un eje fijo tiene una correspondencia formal con el movimiento de traslación de una partícula (o de un cuerpo rígido) a lo largo de una dirección fija. Las variables cinemáticas son ϕ , ω , y α en el primer caso y x , v , y a en el segundo. Estas cantidades se corresponden en pares: ϕ a x , ω a v , y α a a . Nótese que las cantidades angulares difieren dimensionalmente de las cantidades lineales correspondientes por un factor de longitud. Nótese, además, que las seis cantidades pueden ser tratadas como escalares en este caso especial. Por ejemplo, una partícula en cualquier instante puede moverse en una dirección o en otra a lo largo de su trayectoria en línea recta, correspondiendo a un valor de v positivo o negativo; del mismo modo, una partícula en cualquier instante puede girar en una dirección o en otra con respecto a su eje fijo, correspondiendo a un valor de ω positivo o negativo.

Cuando, en el movimiento de traslación, eliminamos la restricción de que el movimiento sea a lo largo de una línea recta y consideramos el caso general del movimiento en tres dimensiones a lo largo de una trayectoria curva, las variables escalares x , v , y a deben ser reemplazadas por los vectores cinemáticos \mathbf{r} , \mathbf{v} , y \mathbf{a} . En la sección 11-4 veremos hasta qué punto las variables cinemáticas de rotación se revelan como auténticos vectores cuando eliminamos la restricción de un eje de rotación fijo.

11-3 ROTACIÓN CON ACELERACIÓN ANGULAR CONSTANTE

Hemos visto (en el capítulo 2) que, para el movimiento de traslación de una partícula o de un cuerpo rígido a lo largo de una dirección fija, como el eje x , el tipo de movimiento más sencillo es aquel en el cual la aceleración a es cero. El siguiente tipo más sencillo corresponde a $a =$ una

constante (distinta de cero); para este movimiento derivamos las ecuaciones de la tabla 2 del capítulo 2, que relacionan las variables cinemáticas x , v , a , y t en todas las combinaciones posibles.

Para el movimiento de rotación de una partícula o de un cuerpo rígido alrededor de un eje fijo, el tipo de movimiento más sencillo es aquel en el que la aceleración angular α es cero (como el movimiento circular uniforme). El siguiente tipo más sencillo de movimiento, en el que $\alpha =$ una constante (distinta de cero), corresponde exactamente al movimiento lineal con $a =$ una constante (distinta de cero). Como antes, podemos derivar cinco ecuaciones que enlacen a las cuatro variables cinemáticas ϕ , ω , α , y t en todas las combinaciones posibles. Estas ecuaciones angulares pueden ser derivadas, mediante los métodos que empleamos para derivar las ecuaciones lineales, o pueden escribirse simplemente, sustituyendo las cantidades angulares correspondientes por las cantidades lineales en las ecuaciones lineales.

Como ejemplo, derivemos la expresión que enlaza a ω , α , y t . Comenzaremos por reescribir la ecuación 5 como

$$d\omega = \alpha dt.$$

Integramos ahora el lado izquierdo desde ω_0 (la velocidad angular en el tiempo $t = 0$) hasta ω (la velocidad angular en el tiempo t), y a la derecha desde el tiempo 0 hasta el tiempo t :

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t \alpha dt = \alpha \int_0^t dt,$$

donde el último paso puede ser considerado *solamente* cuando la aceleración angular α es constante. Llevando a cabo la integración, obtenemos

$$\omega - \omega_0 = \alpha t,$$

o sea

$$\omega = \omega_0 + \alpha t. \tag{6}$$

Esto es el análogo de rotación de la ecuación 15 del capítulo 2, $v = v_0 + at$. Nótese que podríamos obtener la expresión de rotación sustituyendo a ω por v y a α por a en la expresión de la traslación.

Por medio de tales derivaciones, podemos hallar cinco expresiones básicas de la cinemática de la rotación con una aceleración angular constante, que se listan en la tabla 1 junto con sus contrapartes de la traslación. La ecuación 7 puede derivarse escribiendo la ec. 3 como $d\phi = \omega dt$ e integrando. Las ecuaciones 8, 9, y 10 pueden derivarse eliminando, respectivamente, a t , α , y ω_0 de las ecuaciones 6 y 7 (que pueden ser consideradas como las dos ecuaciones básicas, porque se derivan de las definiciones

TABLA 1 MOVIMIENTO CON ACELERACIÓN LINEAL O ANGULAR CONSTANTE

Número de la ecuación (capítulo 2)	Movimiento de traslación (dirección fija)	Movimiento de rotación (eje fijo)	Número de la ecuación (este capítulo)
(15)	$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(6)
(19)	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(7)
(20)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\phi - \phi_0)$	(8)
(21)	$x = x_0 + \frac{v_0 + v}{2} t$	$\phi = \phi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$	(9)
(22)	$x = x_0 + vt - \frac{1}{2}at^2$	$\phi = \phi_0 + \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10)

de la aceleración angular y de la velocidad angular). Usted podría comprobar dimensionalmente todas las ecuaciones antes de verificarlas. Ambos grupos de ecuaciones se aplican tanto para partículas como para cuerpos rígidos.

El sentido positivo de las cantidades angulares ω y α se halla determinado por la dirección en la cual ϕ crece. A partir de la ecuación 3, vemos que ω es positiva si ϕ crece con el tiempo (esto es, el objeto está girando en dirección contraria a las manecillas del reloj). De igual forma, a partir de la ecuación 5, vemos que α es positiva si ω crece con el tiempo, aun si ω es negativa y se torna menos negativa. Estas convenciones son similares a las convenciones de signo correspondientes para las cantidades lineales.

Problema muestra 1 Partiendo desde el reposo en el tiempo $t = 0$, una piedra abrasiva tiene una aceleración angular constante α de 3.2 rad/s². En $t = 0$ la línea de referencia AB de la figura 5 es horizontal. Halle (a) el desplazamiento angular de la línea AB (y por lo tanto de la piedra abrasiva) y (b) la velocidad angular de la piedra abrasiva 2.7 s después.

Solución (a) α y t están dadas; deseamos hallar ϕ . De aquí que utilicemos la ecuación 7 (véase la tabla 1):

$$\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2.$$

En $t = 0$, tenemos que $\phi_0 = 0$, $\omega_0 = 0$, y $\alpha = 3.2$ rad/s². Por lo tanto, después de 2.7 s,

$$\begin{aligned} \phi &= 0 + (0)(2.7 \text{ s}) + \frac{1}{2}(3.2 \text{ rad/s}^2)(2.7 \text{ s})^2 \\ &= 11.7 \text{ rad} = 1.9 \text{ rev.} \end{aligned}$$

(b) α y t están dadas; deseamos hallar ω . Por lo tanto, usaremos la ecuación 6:

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_0 + \alpha t = 0 + (3.2 \text{ rad/s}^2)(2.7 \text{ s}) \\ &= 8.6 \text{ rad/s} = 1.4 \text{ rev/s.} \end{aligned}$$

Problema muestra 2 Supongamos que la potencia que mueve a la rueda abrasiva del problema muestra 1 es desconectada cuando la rueda está girando a una velocidad angular de 8.6 rad/s. Una pequeña fuerza de fricción en la flecha causa una deceleración angular constante, y la rueda llega finalmente al reposo en un tiempo de 192 s. Halle (a) la aceleración angular y (b) el ángulo total girado durante la deceleración.

Solución (a) Dadas $\omega_0 = 8.6$ rad/s y $t = 192$ s, buscamos α y, por lo tanto, utilizamos la ecuación 6 ($\omega = \omega_0 + \alpha t$), o sea

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{0 - 8.6 \text{ rad/s}}{192 \text{ s}} = -0.045 \text{ rad/s}^2.$$

(b) Según la ecuación 9 de la tabla 1 tenemos que

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_0 + \frac{\omega_0 + \omega}{2} t = 0 + \frac{8.6 \text{ rad/s} + 0}{2} (192 \text{ s}) \\ &= 826 \text{ rad} = 131 \text{ rev.} \end{aligned}$$

11-4 CANTIDADES DE ROTACIÓN COMO VECTORES

El desplazamiento lineal, la velocidad y la aceleración son vectores. Las cantidades angulares correspondientes *pueden ser* también vectores, ya que además de su magnitud debemos especificar también su dirección, es decir, la dirección del eje de rotación en el espacio. Puesto que hemos considerado la rotación sólo en torno a un eje fijo, hemos podido tratar a ϕ , ω , y α como cantidades escalares. Si cambia la dirección del eje, sin embargo, ya no podemos eludir la pregunta, "¿son vectores las cantidades de rotación?"

En la sección 3-2 aprendimos que, para representar a un vector, una cantidad física no debe tener solamente magnitud y dirección, sino que debe obedecer también a las leyes de la suma vectorial. Sólo experimentalmente podemos discernir si una cantidad física obedece a estas leyes.

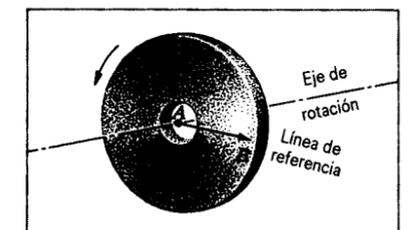


Figura 5 Problema muestra 1. La línea de referencia AB es horizontal en $t = 0$ y gira con la piedra abrasiva.

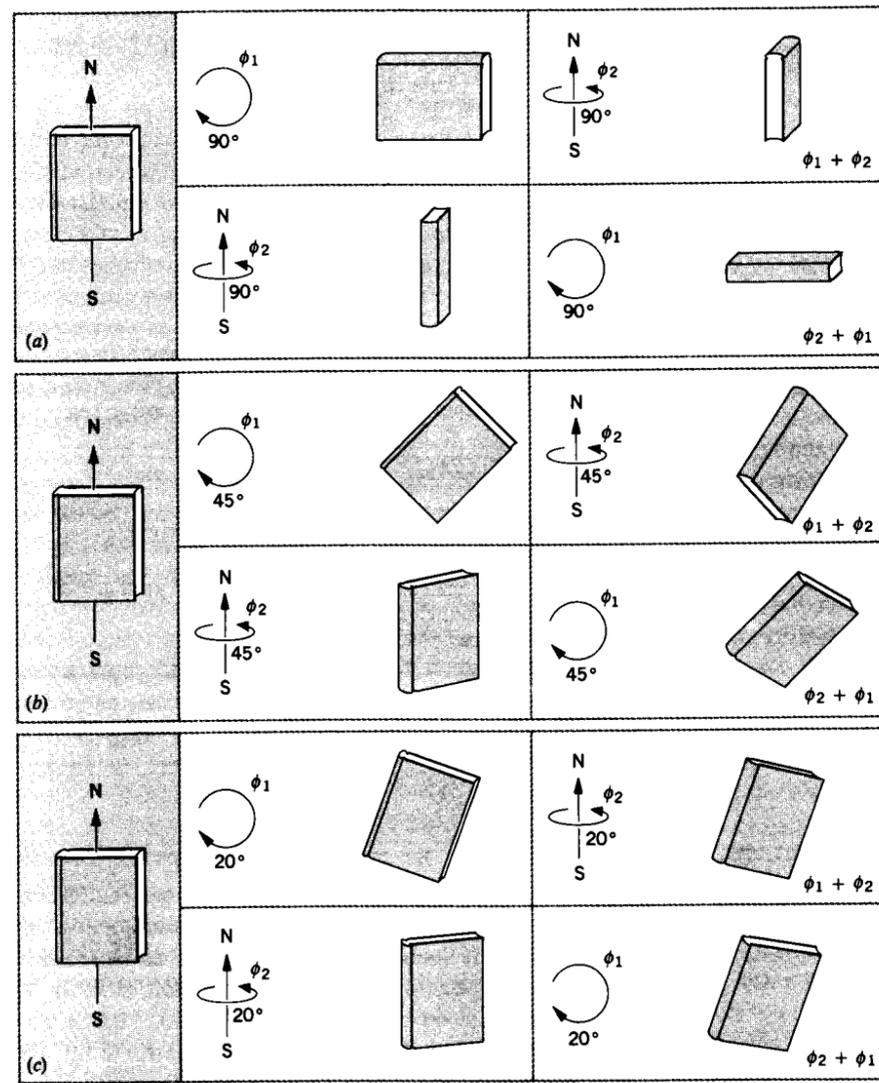


Figura 6 (a) Al libro se le dan dos giros de 90° , ϕ_1 alrededor de un eje que forma un ángulo recto con la página y ϕ_2 alrededor de un eje en la página señalada con norte-sur. Como se muestra, la orientación final depende del orden en que efectuemos estos giros. Así, el resultado de la operación $\phi_1 + \phi_2$ difiere del de $\phi_2 + \phi_1$. (b) En giros de 45° , la diferencia entre las orientaciones finales es más pequeña de lo que era en el caso del giro de 90° . (c) En giros de 20° , las orientaciones finales son casi idénticas. Las orientaciones finales serán más parecidas al volverse más pequeños los ángulos ϕ_1 y ϕ_2 .

Veamos primero el desplazamiento angular ϕ . La magnitud del desplazamiento angular de un cuerpo es el ángulo al cual gira el cuerpo. Sin embargo, los desplazamientos angulares no son vectores porque no se suman como vectores. Por ejemplo, demos dos rotaciones sucesivas ϕ_1 y ϕ_2 a un libro que inicialmente está en un plano horizontal (Fig. 6). Sea ϕ_1 una rotación a 90° en sentido de las manecillas del reloj en torno al eje vertical que pasa por el centro del libro visto éste desde arriba. Sea ϕ_2 un giro de 90° en sentido de las manecillas del reloj alrede-

edor de un eje norte-sur que pasa por el centro del libro según lo vemos mirando al norte. En un caso, apliquemos la operación ϕ_1 primero, y luego ϕ_2 . En el otro caso, apliquemos primero la operación ϕ_2 y luego ϕ_1 . Conviene que usted haga la prueba. Ahora, si los desplazamientos angulares son cantidades vectoriales, deben sumarse como vectores. En particular, deben obedecer a la ley asociativa de la suma de vectores, $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, que nos dice que el orden en que sumemos a los vectores no afecta su suma. Como se indica en la figura 6a, esta ley no tiene

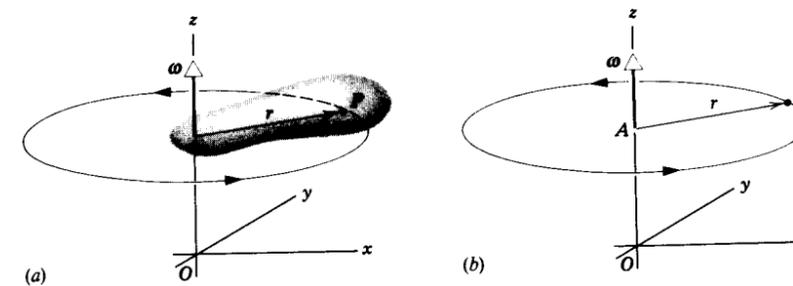


Figura 7 El vector de la velocidad angular de (a) un cuerpo rígido al girar y (b) una partícula al girar, ambos considerados con respecto a un eje fijo.

validez para desplazamientos angulares finitos, y entonces $\phi_1 + \phi_2 \neq \phi_2 + \phi_1$, donde ϕ_1 y ϕ_2 significan las operaciones mostradas en la figura 6a. Por lo tanto, los desplazamientos angulares finitos no pueden ser representados como cantidades vectoriales.

A medida que los dos desplazamientos angulares se hagan más pequeños, el resultado de la operación $\phi_1 + \phi_2$ se acerca al de la operación $\phi_2 + \phi_1$ (Fig. 6b, c). Si los desplazamientos angulares se hacen infinitesimales, el orden de la suma ya no altera el resultado; así, $d\phi_1 + d\phi_2 = d\phi_2 + d\phi_1$. De aquí que *los desplazamientos angulares infinitesimales pueden ser representados como vectores*.

Las cantidades definidas en términos de desplazamientos angulares infinitesimales pueden ser también vectores. Por ejemplo, la velocidad angular es $\omega = d\phi/dt$. Puesto que $d\phi$ es un vector y dt es un escalar, el cociente ω es un vector. *Por lo tanto, la velocidad angular puede ser representada como un vector*. En la figura 7a, por ejemplo, representamos a la velocidad angular ω del cuerpo rígido en rotación por una flecha dirigida a lo largo del eje de rotación; en la figura 7b representamos a la rotación de una partícula P en torno a un eje fijo precisamente de la misma manera. La longitud de la flecha se hace proporcional a la magnitud de la velocidad angular. El sentido de la rotación determina la dirección en la que la flecha apunta a lo largo del eje. Por convención, si los dedos de la mano derecha se doblan alrededor del eje en dirección de la rotación del cuerpo, el pulgar extendido apunta a lo largo de la dirección del vector de la velocidad angular. Para la rueda de la figura 1, por lo tanto, el vector de la velocidad angular apunta perpendicularmente a la página (en la dirección de z negativa) si el corredor está pedaleando hacia adelante. En la figura 3b, ω es perpendicular a la página, apuntando hacia arriba y afuera correspondiendo a la rotación en sentido contrario a las manecillas del reloj. La velocidad angular de la tornamesa de un fonógrafo (que gira en sentido de las manecillas si se la ve desde arriba) es un vector que apunta hacia abajo. Nótese que nada se mueve en dirección al vector de la velocidad angular. El vector representa la velocidad angular del movimiento de rotación que tiene lugar en un plano perpendicular a él.

La aceleración angular es también una cantidad vectorial. Esto se deduce de la definición $\alpha = d\omega/dt$, en la cual $d\omega$ es un vector y dt un escalar. Más adelante encon-

traremos otras cantidades de rotación que son vectores, como la torca y el impulso angular. El uso de la regla de la mano derecha para definir la dirección de los vectores $d\phi$, ω , y α conduce a un formalismo vectorial que es consistente con todas las cantidades de rotación.

Problema muestra 3 Un disco gira en una flecha horizontal montada en chumaceras, a una velocidad angular ω_1 de 84 rad/s como en la figura 8a. Todo el conjunto de disco y flecha está colocado sobre una tornamesa que gira con respecto a un eje vertical a $\omega_2 = 43$ rad/s, en sentido antihorario vista desde arriba. Describa la rotación del disco vista por un observador dentro del salón.

Solución El disco está sujeto a dos velocidades angulares simultáneamente; podemos describir su movimiento resultante por la suma vectorial de estos vectores. La velocidad angular ω_1 asociada con la rotación de la flecha tiene una magnitud de 84 rad/s y tiene lugar en torno a un eje que no está fijo pero que, visto por un observador situado dentro del salón, gira en un plano horizontal a 43 rad/s. La velocidad angular ω_2 asociada con la tornamesa está fija verticalmente y tiene una magnitud de 43 rad/s.

La velocidad angular resultante ω del disco es la suma vectorial de ω_1 y ω_2 . La magnitud de ω es

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{(84 \text{ rad/s})^2 + (43 \text{ rad/s})^2} = 94 \text{ rad/s.}$$

La dirección de ω no está fija en el marco de referencia de nuestro observador sino que gira a la misma razón angular que

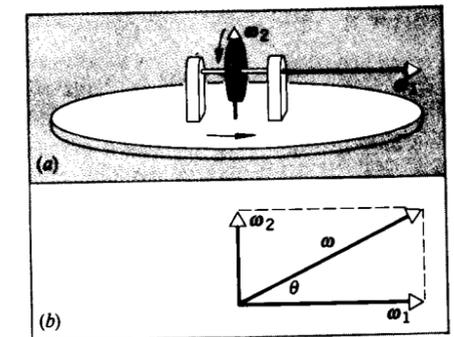


Figura 8 Problema muestra 3. (a) Un disco que gira sobre una tornamesa que también gira. (b) La suma de los vectores de la velocidad angular.

la tornamesa. El vector ω no está en el plano horizontal sino que apunta hacia arriba en un ángulo θ (véase la Fig. 8b), donde

$$\theta = \tan^{-1} \frac{\omega_2}{\omega_1} = \tan^{-1} \frac{43 \text{ rad/s}}{84 \text{ rad/s}} = 27^\circ.$$

Podemos describir el movimiento del disco como una sola rotación en torno a este nuevo eje (cuya dirección en el marco de referencia de nuestro observador está cambiando con el tiempo como se describió anteriormente) en una cantidad angular de 94 rad/s. ¿Cómo cambiaría esta situación si la dirección de rotación del disco, o de la tornamesa, o de ambas, se invirtieran?

11-5 RELACIONES ENTRE VARIABLES LINEALES Y ANGULARES: FORMA ESCALAR

En las secciones 4-4 y 4-5 discutimos la velocidad y la aceleración lineales de una partícula que se mueve en círculo. Cuando un cuerpo rígido gira con respecto a un eje fijo, cada partícula del cuerpo se mueve en círculo. De aquí que podamos describir al movimiento de tal partícula ya sea en variables lineales o en variables angulares. La relación entre las variables lineal y angular nos permite ir y venir de una descripción a la otra, resultando muy útil.

Consideremos una partícula en P situada en un cuerpo rígido, a una distancia perpendicular r del eje que pasa por A , como en la figura 7. Esta partícula se mueve en un círculo de radio r . La posición angular ϕ de la línea de referencia AP se mide con respecto al eje x o el x' , como en la figura 3b. La partícula se mueve a través de una distancia s a lo largo del arco cuando el cuerpo gira en un ángulo ϕ , de modo que

$$s = \phi r, \quad (11)$$

donde ϕ está en radianes.

Al diferenciar ambos lados de esta ecuación respecto al tiempo, y observando que r es constante, obtenemos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\phi}{dt} r.$$

Pero ds/dt es la velocidad lineal (tangencial) de la partícula en P y $d\phi/dt$ es la velocidad angular ω del cuerpo que gira, de modo que

$$v = \omega r. \quad (12)$$

Ésta es una relación entre las magnitudes de la velocidad lineal tangencial y de la velocidad angular; la velocidad lineal de una partícula en movimiento circular es el producto de la velocidad angular y la distancia r de la partícula desde el eje de rotación.

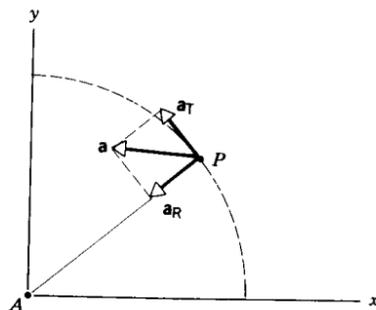


Figura 9 Las componentes radial y tangencial de la aceleración de una partícula en el punto P de un cuerpo rígido que gira en torno al eje z .

Al diferenciar la ecuación 12 con respecto al tiempo, tenemos que

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} r.$$

Pero dv/dt es la magnitud de la componente tangencial a_T de la aceleración de la partícula (véase la sección 4-5), y $d\omega/dt$ es la magnitud de la aceleración angular del cuerpo que gira, de modo que

$$a_T = \alpha r. \quad (13)$$

De aquí que la magnitud de la componente tangencial de la aceleración lineal de una partícula en movimiento circular sea el producto de la magnitud de la aceleración angular y la distancia r de la partícula desde el eje de rotación.

Hemos visto en la sección 4-4 que la componente radial a_R de la aceleración es v^2/r para una partícula que se mueve en círculo. Esto puede ser expresado en términos de la velocidad angular usando la ecuación 12. Tenemos

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r. \quad (14)$$

En la figura 9 se muestra la aceleración resultante a del punto P .

Las ecuaciones 11 a 14 nos permiten describir el movimiento de un punto en un cuerpo rígido que gira en torno a un eje fijo ya sea en variables angulares o en variables lineales. Podríamos preguntar por qué necesitamos las variables angulares cuando ya estamos familiarizados con las variables lineales equivalentes. La respuesta es que la descripción angular ofrece una ventaja distinta sobre la descripción lineal cuando deben considerarse varios puntos del mismo cuerpo en rotación. En un cuerpo en rotación, los puntos que están a diferentes distancias del eje no tienen el mismo desplazamiento, velocidad, o aceleración lineales, sino que todos los puntos de un cuerpo rígido que giran en torno a un eje fijo tienen el

mismo desplazamiento, velocidad, o aceleración angulares en cualquier instante. Usando las variables angulares podemos describir el movimiento de todo el cuerpo de manera sencilla.

La figura 10 muestra un ejemplo interesante de la razón entre las variables lineales y angulares. Cuando una chimenea alta es demolida por una carga explosiva colocada en su base, a menudo se quebrará al caer, comenzando la rotura hacia el lado de abajo de la chimenea.

Antes de la rotura, la chimenea es un cuerpo rígido, que pivotea en torno a un eje cercano a su base con una cierta aceleración angular α . Según la ecuación 13, la parte superior de la chimenea tiene una aceleración tangencial a_T dada por αL , donde L es la longitud de la chimenea. La componente vertical de a_T puede exceder fácilmente de g , la aceleración de la caída libre. Esto es, la parte superior de la chimenea está cayendo hacia abajo con una aceleración vertical mayor que la de un ladrillo en caída libre.

Esto puede suceder solamente mientras la chimenea permanezca como un cuerpo rígido aislado. Dicho de otra manera, la parte del fondo de la chimenea, al actuar en el mortero que mantiene unidos a los ladrillos, debe "jalar hacia abajo" de la parte superior de la chimenea para provocar una caída tan rápida. Esta fuerza cortante es a menudo mayor de lo que el mortero puede tolerar, y la chimenea se rompe. La chimenea ha pasado a ser ahora dos cuerpos rígidos, cuya parte superior está en caída libre llegando al suelo más tarde de lo que lo haría si la chimenea no se hubiese roto.

Problema muestra 4 Si el radio de la piedra abrasiva del problema muestra 1 es de 0.24 m, calcule (a) la velocidad lineal o tangencial de un punto en la periferia, (b) la aceleración tangencial de un punto en la periferia, y (c) la aceleración radial de un punto en la periferia, al final de 2.7 s. (d) Repita para un punto a la mitad de la distancia entre el centro y la periferia, es decir, en $r = 0.12$ m.

Solución Tenemos que $\alpha = 3.2 \text{ rad/s}^2$, $\omega = 8.6 \text{ rad/s}$ después de 2.7 s, y $r = 0.24$ m. Entonces,

$$(a) v = \omega r = (8.6 \text{ rad/s})(0.24 \text{ m}) = 2.1 \text{ m/s};$$

$$(b) a_T = \alpha r = (3.2 \text{ rad/s}^2)(0.24 \text{ m}) = 0.77 \text{ m/s}^2;$$

$$(c) a_R = \omega^2 r = (8.6 \text{ rad/s})^2(0.24 \text{ m}) = 18 \text{ m/s}^2.$$

(d) Las variables angulares son las mismas para este punto en $r = 0.12$ m que para un punto de la periferia. Esto es, una vez más $\alpha = 3.2 \text{ rad/s}^2$ y $\omega = 8.6 \text{ rad/s}$. Usando las ecuaciones 12 a 14 con $r = 0.12$ m, obtenemos para este punto

$$v = 1.0 \text{ m/s}, \quad a_T = 0.38 \text{ m/s}^2, \quad a_R = 8.9 \text{ m/s}^2.$$

Éstas son cada una la mitad de sus valores respectivos para el punto de la periferia. Las variables lineales son proporcionales al radio desde el eje de rotación.

Nótese una vez más que, en las ecuaciones que implican variables angulares solamente, como las listadas en la tabla 1, usted puede expresar las cantidades angulares en cualquier unidad angular (grados, radianes, revoluciones), en tanto se



Figura 10 Una chimenea, al caer, a menudo no es lo suficientemente fuerte como para proporcionar la aceleración tangencial de gran radio que se necesitaría si todo el objeto fuese a girar como un cuerpo rígido con aceleración angular constante. Para una descripción completa de este fenómeno, véase "More on the Falling Chimney", por A. A. Bartlett, *The Physics Teacher*, septiembre de 1976, pág. 351.

haga así de manera consistente. Sin embargo, en las ecuaciones en que se mezclan cantidades lineales y angulares, como las ecuaciones 11, 12, 13, y 14, se deberán de expresar las cantidades angulares en radianes, como lo hemos hecho en este problema muestra. Debemos hacerlo así porque las ecuaciones 12, 13, y 14 se basaron en la ecuación 11, que define, en efecto, la medida radian.

11-6 RELACIONES ENTRE LAS VARIABLES LINEALES Y ANGULARES: FORMA VECTORIAL (Opcional)

En la sección anterior expresamos a las variables tanto lineales como angulares en forma escalar. Regresaremos ahora a los métodos vectoriales haciendo un análisis similar al de la sección 4-5, pero utilizando aquí variables angulares. Continuaremos trabajando con el cuerpo rígido que gira en torno al eje fijo, como en la figura 3.

La figura 11a muestra una partícula P en el cuerpo rígido en rotación de la figura 3. (Aquí, por conveniencia, hemos eliminado incluso el perfil del cuerpo, mostrando solamente la partícula en P y el círculo que describe cuando gira el cuerpo.) El cuerpo puede tener cualquier aceleración angular, incluso una aceleración no constante. Como en la figura 7b, el vector ω representa la velocidad angular de la partícula situada en P en el tiempo elegido t , vector que es paralelo al eje z y que se ha representado en la figura 11a en el origen, para mayor conveniencia.

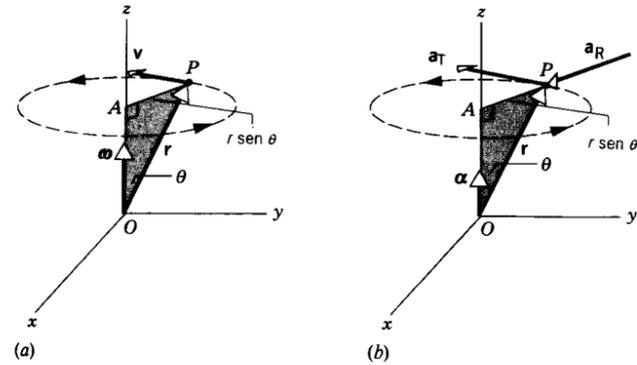


Figura 11 (a) Una partícula en P , en el cuerpo rígido en rotación de la Fig. 3 está ubicada en r con respecto al origen O . La partícula tiene una velocidad angular ω (dirigida a lo largo del eje z) y una velocidad tangencial v . (b) La partícula situada en P tiene una aceleración angular α a lo largo del eje z . La partícula tiene también una aceleración tangencial a_T y una aceleración radial a_R .

La partícula P está ubicada en el sistema de coordenadas tridimensionales de la figura 11a por el vector de posición r trazado desde el origen. Esto representa un cambio en la notación acostumbrada, donde r representaba la distancia perpendicular desde P hasta el eje z (véase la Fig. 3). En la figura 11, aquella distancia perpendicular es ahora $r \sin \theta$.

A partir de la ecuación 12 podemos hallar la magnitud de la velocidad de la partícula P (teniendo presente que r de la ecuación 12 es ahora $r \sin \theta$):

$$v = \omega r \sin \theta. \quad (15)$$

Aquí ω es la magnitud del vector ω en la figura 11, r es la magnitud del vector r , y θ es el ángulo entre estos dos vectores.

La ecuación 15 tiene la misma forma que la ecuación 16 del capítulo 3 para la magnitud del producto cruz o producto vectorial entre dos vectores: Si a y b son dos vectores cualesquiera, su producto vectorial c tiene la magnitud $c = ab \sin \theta$, donde θ es el ángulo entre a y b . La comparación con la ecuación 15 sugiere que podemos expresar la velocidad como un producto vectorial:

$$v = \omega \times r. \quad (16)$$

La ecuación 16 ciertamente da la magnitud correcta para v porque, como hemos visto, la definición de la magnitud del producto vectorial, nos dará la ecuación 15. Veamos si la ecuación 16 nos da también la dirección correcta para v .

Según la definición del producto vectorial en la sección 3-5, si $c = a \times b$, entonces el vector c está a lo largo de una línea en ángulo recto con el plano formado por a y b . La dirección de c queda determinada por la regla de la mano derecha, en la cual damos un giro al primer vector a (el orden es importante) en el plano del segundo vector b con los dedos de la mano derecha moviéndose a través del ángulo más pequeño entre a y b ; el pulgar extendido de la mano derecha nos da entonces la dirección de c . (Véase la Fig. 17 del capítulo 3.)

Aplicando esta regla cuidadosamente a los vectores ω y r de la figura 11a, hallaremos que la ecuación 16 da realmente la dirección correcta para la velocidad v en el tiempo t , esto es,

tangente a la trayectoria de la partícula situada en P . (Al aplicar la regla de la mano derecha, está permitido deslizar un vector a cualquier posición en el espacio coordenado, en tanto no se cambie su dirección. Así, podemos situar a v temporalmente en el origen, si esto nos ayuda a aplicar la regla de la mano derecha para hallar la dirección de v .)

Volvamos ahora a la aceleración. Podemos hallar la aceleración (lineal) al diferenciar la velocidad dada por la ecuación 16. Esto es,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} (\omega \times r) = \frac{d\omega}{dt} \times r + \omega \times \frac{dr}{dt}. \quad (17)$$

Nótese que, al considerar la derivada de un producto vectorial, seguimos la misma regla que empleamos al considerar la derivada de un producto algebraico ordinario, excepto que debemos tener cuidado de que el orden de los vectores en los términos siga siendo el mismo. (Esto es, en ambos términos de la derecha de la ecuación 17, ω viene antes que r , como sucede en el producto original.) Es importante mantener el orden apropiado porque, como lo aprendimos en la figura 17b del capítulo 3, $a \times b = -b \times a$.

En la ecuación 17, al reemplazar a $d\omega/dt$ con la aceleración angular α (véase la Ec. 5), y al reemplazar también a dr/dt con la velocidad v , obtenemos

$$a = \alpha \times r + \omega \times v. \quad (18)$$

Estudiemos cada uno de los dos términos del lado derecho de la ecuación 18 por orden.

En tanto que el eje de rotación permanezca fijo, $d\omega$ apuntará también a lo largo del eje z . Puesto que la dirección de α debe ser la misma que la dirección de $d\omega$, la aceleración angular α está también a lo largo del eje z , como se muestra en la figura 11b. Puesto que α es paralela a ω , se deduce que $\alpha \times r$ debe de ser paralela a $\omega \times r$ y también a v (véase la Ec. 16). Por lo tanto, $\alpha \times r$, al igual que v en la figura 11a, es tangente a la trayectoria circular de la partícula en P , y es la componente tangencial a_T de la aceleración a de la partícula. La magnitud de la aceleración tangencial estuvo dada por la ecuación 13, la que escribimos como $a_T = \alpha r \sin \theta$ después de reemplazar a r por $r \sin \theta$.

Consideremos ahora el segundo término del lado derecho de la ecuación 18. Si imaginamos que el vector ω en la figura 11a se movió hasta P (quedando paralelo al eje z en el proceso), vemos inmediatamente al usar la regla de la mano derecha, que el segundo término de la ecuación 18 $\omega \times v$, apunta radialmente hacia adentro en P . Este segundo término tiene una magnitud ωv (porque el ángulo entre los vectores ω y v es de 90°), lo cual se convierte en $\omega^2 r \sin \theta$ al usar la ecuación 15. Al comparar con la ecuación 14, vemos que ésta es precisamente la componente radial a_R del vector de la aceleración.

Por lo tanto, podemos escribir la ecuación 18 como

$$a = a_T + a_R, \quad (19)$$

donde

$$a_T = \alpha \times r \quad (20)$$

y

$$a_R = \omega \times v. \quad (21)$$

Las ecuaciones 16 y 18 son, entonces, las relaciones vectoriales entre las variables lineales y angulares para la rotación de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo. ■

PREGUNTAS

- En la sección 11-1 afirmábamos que, en general, se requieren seis variables para ubicar a un cuerpo rígido con respecto a un marco de referencia en particular. ¿Cuántas variables se requieren para ubicar al cuerpo de la figura 2 con respecto al marco xy mostrado en esa figura? Si este número no es seis, explique la diferencia.
- ¿En qué sentido es el radián una medida "natural" del ángulo, y el grado una medida "arbitraria" de esa misma cantidad? Por lo tanto, ¿qué ventajas existen al usar radianes en lugar de grados?
- ¿Podrían las cantidades angulares ϕ , ω , y α ser expresadas en términos de grados en lugar de radianes en las ecuaciones de rotación de la tabla 1?
- ¿Tiene que estar necesariamente a lo largo de un eje el vector que represente a la velocidad angular de una rueda que gire con respecto a ese eje fijo? Podría representarse simplemente como paralelo al eje, pero situado en cualquier lugar? Recuérdese que estamos en libertad de deslizar un vector de desplazamiento a lo largo de su propia dirección o trasladarlo lateralmente sin cambiar su valor.
- Haga girar un libro de la misma forma que en la figura 6a, pero esta vez use desplazamientos angulares de 180° en lugar de 90° . ¿Qué concluiría usted con respecto a las posiciones finales del libro? ¿Le obliga esto a cambiar de opinión acerca de si los desplazamientos angulares (finitos) pueden ser tratados como vectores?

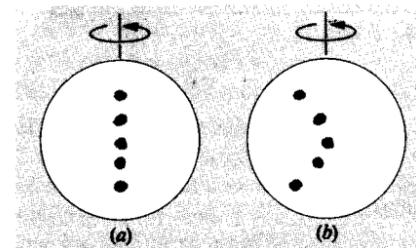


Figura 12 Pregunta 6.

- La rotación del Sol puede monitorizarse siguiendo las manchas solares, tormentas magnéticas del Sol de aspecto más oscuro en el disco solar. La figura 12a muestra las posiciones iniciales de cinco manchas y la figura 12b las posiciones de las mismas manchas al cabo de una rotación solar más. ¿Qué podemos concluir con respecto a la naturaleza física del Sol a partir de estas observaciones?
- ¿Por qué es aconsejable expresar a α en rev/s^2 en la ecuación 7 de la tabla 1 ($\phi = \phi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$) pero no en la ecuación 13 ($a_T = \alpha r$)?
- Un cuerpo rígido está libre de girar con respecto a un eje fijo. ¿Puede el cuerpo tener una aceleración angular distinta de cero aun cuando la velocidad angular del cuerpo sea (quizás instantáneamente) cero? ¿Cuál es la equivalente lineal de esta pregunta? Dé ejemplos físicos para ilustrar ambas situaciones, la lineal y la angular.

- Un golfista hace oscilar un palo de golf, haciendo un tiro largo desde la estaquilla o tee. ¿Tienen todos los puntos del palo la misma velocidad angular ω en cualquier instante mientras el palo está en movimiento?
- Cuando decimos que un punto situado en el ecuador de la Tierra tiene una velocidad angular de 2π rad/día, ¿qué marco de referencia utilizamos?
- Teniendo en cuenta la rotación y la traslación de la Tierra, ¿se mueve un árbol más rápidamente durante el día o durante la noche? ¿Con respecto a qué marco de referencia se da la respuesta? (La rotación y la traslación de la Tierra son en la misma dirección.)
- Una rueda está girando alrededor de su eje. Considérese un punto en la periferia. Cuando la rueda gira a una velocidad angular constante, ¿tiene el punto una aceleración radial? ¿Una aceleración tangencial? Cuando la rueda gira con una aceleración angular constante, ¿tiene el punto una aceleración radial? ¿Una aceleración tangencial? ¿Cambian las magnitudes de estas aceleraciones con el tiempo?
- Supóngase que se le pida determinar la distancia recorrida por una aguja al tocar un disco de vinilo de fonógrafo. ¿Qué información necesitará usted? Explique desde el punto de vista de un marco de referencia (a) fijo en el salón, (b) fijo en el disco que está girando, y (c) fijo en el brazo del tocadiscos.
- ¿Cuál es la razón entre las velocidades angulares de un par de engranes acoplados de radios diferentes?
- El planeta Venus (véase la Fig. 13) se mueve en una órbita circular alrededor del Sol, completando una vuelta cada 225 días. Venus gira también en torno a un eje polar,

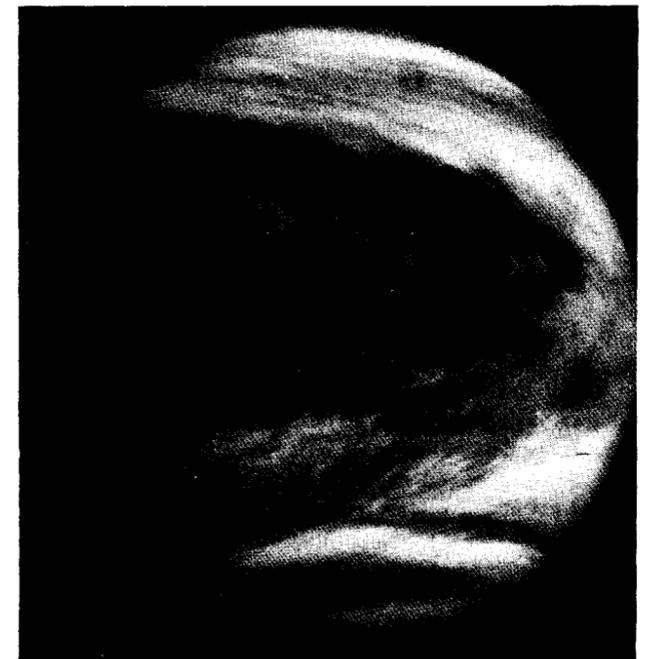


Figura 13 Pregunta 15.

completando una rotación cada 243 días. El sentido (dirección) del movimiento rotatorio es opuesto, pero paralelo, al del movimiento de traslación. (a) Describa el vector que represente la rotación de Venus en torno a su

eje. (b) Describa el vector que represente la velocidad angular de Venus en torno al Sol. (c) Describa la velocidad angular resultante, obtenida al sumar las velocidades de traslación y angular rotatoria.

PROBLEMAS

Sección 11-2 Las variables de la rotación

- Demuestre que $1 \text{ rev/min} = 0.105 \text{ rad/s}$.
- El ángulo girado por el volante de un generador durante un intervalo de tiempo t está dado por

$$\phi = at + bt^3 - ct^4,$$

donde $a, b, y c$ son constantes. ¿Cuál es la expresión para (a) su velocidad angular y (b) su aceleración angular?

- Nuestro Sol está a 2.3×10^4 ly (años luz) del centro de nuestra galaxia, la Vía Láctea, y se mueve en círculo alrededor de este centro a una velocidad de 250 km/s. (a) ¿Qué tanto tiempo le toma al Sol completar una vuelta alrededor del centro galáctico? (b) ¿Cuántas vueltas ha completado el Sol desde que se formó hace alrededor de 4.5×10^9 años?
- Una rueda gira con una aceleración angular α dada por

$$\alpha = 4at^3 - 3bt^2,$$

donde t es el tiempo y a y b son constantes. Si la rueda tiene una velocidad angular inicial ω_0 , escriba las ecuaciones para (a) la velocidad angular y (b) el ángulo girado, en función del tiempo.

- ¿Cuál es la velocidad angular de (a) la manecilla de segundos, (b) la manecilla de minutos, y (c) la manecilla horaria de un reloj?
- Un buen lanzador de béisbol puede lanzar una bola hacia la meta a 85 mi/h con una rotación de 1800 rev/min. ¿Cuántas vueltas da la bola en su camino hacia la meta? Para simplificar, supóngase que la trayectoria de 60 ft es una línea recta.
- Un clavadista da 2.5 vueltas completas en su trayecto de la plataforma de 10 m hasta la superficie del agua. Suponiendo una velocidad inicial vertical nula, calcule la velocidad angular promedio de este clavado.
- La posición angular de un punto situado en la periferia de una rueda en rotación está descrita por $\phi = 4.0t - 3.0t^2 + t^3$, donde ϕ está en radianes si t se ha dado en segundos. (a) ¿Cuál es la velocidad angular en $t = 2.0$ s, y en $t = 4.0$ s? (b) ¿Cuál es la aceleración angular promedio en el intervalo de tiempo que comienza en $t = 2.0$ s y termina en $t = 4.0$ s? (c) ¿Cuál es la aceleración angular instantánea al principio y al final de este intervalo de tiempo?
- Una rueda tiene 8 rayos y un radio de 30 cm. Está montada sobre un eje fijo y gira a razón de 2.5 rev/s. Usted quiere

disparar una saeta de 24 cm paralela a este eje y a través de la rueda sin tocar ninguno de los rayos. Supóngase que la saeta y los rayos son muy delgados; véase la figura 14. (a) ¿Qué velocidad mínima deberá tener la saeta? (b) ¿Importa a dónde apunte usted entre el eje y la llanta? De ser así, ¿cuál es la mejor ubicación?

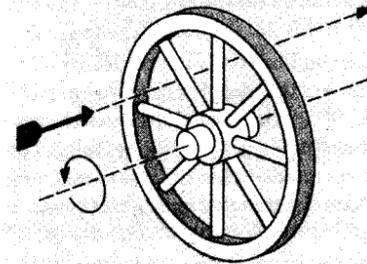


Figura 14 Problema 9.

- Una rueda con 16 rayos que gira en sentido de las manecillas del reloj es fotografiada en película. La película es pasada por el proyector a razón de 24 cuadros/s, que es la velocidad apropiada para el proyector. Sin embargo, en la pantalla aparece la rueda girando en sentido contrario a las manecillas a razón de 4.0 rev/min. Halle la más baja velocidad angular posible a la cual estuvo girando la rueda.
- Un día solar es el intervalo de tiempo entre dos salidas sucesivas del Sol en lo más alto de una longitud dada, esto es, el tiempo de una rotación completa de la Tierra en relación al Sol. Un día sideral es el tiempo de una rotación completa de la Tierra en relación a las estrellas fijas, es decir, el intervalo de tiempo entre dos observaciones sucesivas en lo más alto de una dirección fija en el cielo llamada el equinoccio de primavera. (a) Demuestre que hay exactamente un día solar (medio) menos en un año que días siderales (medios) en un año. (b) Si el día solar (medio) tiene exactamente 24 horas, ¿qué tan largo es un día sideral (medio)?

Sección 11-3 Rotación con aceleración angular constante

- Una tornamesa de fonógrafo que gira a 78 rev/min disminuye su velocidad y se detiene 32 s después de que el motor ha sido desconectado. (a) Halle su aceleración

angular (uniforme) en rev/min². (b) ¿Cuántas revoluciones llevó a cabo en este tiempo?

- La velocidad angular de un motor de automóvil aumenta de 1170 rev/min a 2880 rev/min en 12.6 s. (a) Halle la aceleración angular en rev/min². (b) ¿Cuántas revoluciones completa el motor durante este tiempo?
- Como parte de una inspección de mantenimiento, se hace que el compresor de un motor de propulsión a chorro gire de acuerdo con la gráfica mostrada en la figura 15. ¿Cuántas revoluciones completa el compresor durante la prueba?

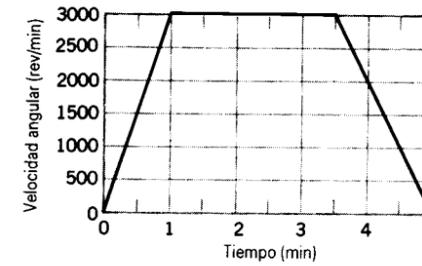


Figura 15 Problema 14.

- El volante de una máquina gira a 25.2 rad/s. Cuando la máquina es apagada, el volante decelera una cantidad constante y llega al reposo después de 19.7 s. Calcule (a) la aceleración angular (en rad/s²) del volante, (b) el ángulo (en rad) a través del cual gira el volante al llegar al reposo, y (c) el número de revoluciones llevadas a cabo por el volante para llegar al reposo.
- Mientras espera para abordar un helicóptero, usted observa que el movimiento del rotor cambió de 315 rev/min a 225 rev/min en 1.00 min. (a) Halle la aceleración angular durante el intervalo. (b) Suponiendo que esta aceleración permanece constante, calcule el tiempo que tarda el rotor en detenerse. (c) ¿Cuántas revoluciones dará el rotor después de la segunda observación que usted realice?
- Cierta rueda gira 90 rev en 15 s, siendo su velocidad angular al final del periodo de 10 rev/s. (a) ¿Cuál era la velocidad angular de la rueda al principio del intervalo de 15 s, suponiendo una aceleración angular constante? (b) ¿Cuánto tiempo transcurrió entre el tiempo en que la rueda estaba en reposo y el comienzo del intervalo de 15 s?
- Una polea de 8.14 cm de diámetro tiene una cuerda de 5.63 m de longitud enrollada a su periferia. Comenzando desde el reposo, se le da a la polea una aceleración angular de 1.47 rad/s². (a) ¿A través de qué ángulo debe girar la rueda para que la cuerda se desenrolle? (b) ¿Cuánto tiempo le toma?
- Un volante completa 42.3 rev cuando su velocidad angular disminuye desde 1.44 rad/s hasta detenerse por completo. (a) Suponiendo una aceleración uniforme, ¿cuál es el tiempo necesario para que llegue al reposo? (b) ¿Cuál es la aceleración angular? (c) ¿Cuánto tiempo se requiere para que complete la primera mitad de las 42.3 rev?
- Comenzando desde el reposo en $t = 0$, una rueda experimenta una aceleración angular constante. Cuando $t =$

2.33 s, la velocidad angular de la rueda es de 4.96 rad/s. La aceleración continúa hasta $t = 23.0$ s, en que cesa de repente. ¿A través de qué ángulo gira la rueda en el intervalo desde $t = 0$ hasta $t = 46.0$ s?

- Un pulsar es una estrella de neutrones que gira a gran velocidad y desde la cual recibimos pulsaciones de radio con una sincronización precisa, correspondiendo una pulsación a cada rotación de la estrella. El periodo T de la rotación se halla midiendo el tiempo entre pulsaciones. Actualmente, el pulsar situado en la región central de la nebulosa del Cangrejo (véase la Fig. 16) tiene un periodo de rotación $T = 0.033$ s, y se observa que la rotación crece a razón de 1.26×10^{-5} s/y. (a) Demuestre que la velocidad angular ω de la estrella está relacionada con el periodo de rotación según $\omega = 2\pi/T$. (b) ¿Cuál es el valor de la aceleración angular en rad/s²? (c) Si la aceleración angular es constante, ¿cuándo cesará de girar el pulsar? (d) El pulsar se originó por la explosión de una supernova en el año 1054 D.C. ¿Cuál era el periodo de rotación del pulsar al nacer? (Supóngase una aceleración angular constante.)

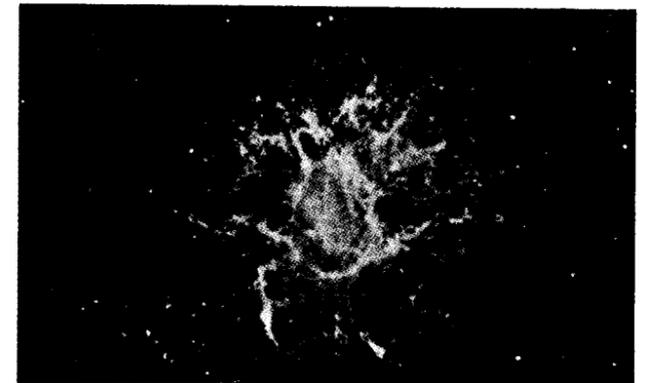


Figura 16 Problema 21.

Sección 11-4 Cantidades de rotación como vectores

- Un planeta P gira alrededor del Sol en órbita circular, con el Sol en el centro, siendo coplanar y concéntrica con la órbita circular de la Tierra E alrededor del Sol. P y E giran en el mismo sentido. Los tiempos requeridos para la revolución de P y E alrededor del Sol son T_P y T_E . Sea T_S el tiempo necesario para que P complete una vuelta alrededor del Sol con relación a E : demuestre que $1/T_S = 1/T_E - 1/T_P$. Suponga que $T_P > T_E$.

Sección 11-5 Relaciones entre las variables lineales y angulares: forma escalar

- Un disco de fonógrafo está colocado sobre una tornamesa girando a razón de $33\frac{1}{3}$ rev/min. (a) ¿Cuál es la velocidad angular en rad/s? ¿Cuál es la velocidad lineal de un punto en el disco situado donde está la aguja (b) al comenzar y (c) al terminar el disco? En estas posiciones, las distancias desde la aguja al eje de la tornamesa son 5.90 in y

2.90 in, respectivamente. (d) Halle la aceleración en cada una de estas posiciones.

24. ¿Cuál es la velocidad angular de un automóvil que da una vuelta circular de 110 m de radio a razón de 52.4 km/h?
25. Un punto en la periferia de una rueda abrasiva de 0.75 m de diámetro cambia su velocidad uniformemente de 12 m/s a 25 m/s en 6.2 s. ¿Cuál es la aceleración angular de la rueda durante este intervalo?
26. ¿Cuáles son (a) la velocidad angular, (b) la aceleración radial, y (c) la aceleración tangencial de una nave espacial que ejecuta una vuelta circular de 3220 km de radio a una velocidad constante de 28,700 km/h?
27. Un astronauta está pasando una prueba en una centrífuga. La centrífuga tiene un radio de 10.4 m y, al comenzar, gira de acuerdo a $\theta = 0.326t^2$, donde t en segundos da θ en radianes. Cuando $t = 5.60$ s, ¿cuáles son (a) la velocidad angular del astronauta, (b) su velocidad tangencial, (c) su aceleración tangencial, y (d) su aceleración radial?
28. La órbita de la Tierra alrededor del Sol es casi un círculo. (a) ¿Cuál es la velocidad angular de la Tierra (vista como una partícula) con respecto al Sol? (b) ¿Cuál es su velocidad lineal en su órbita? (c) ¿Cuál es la aceleración de la Tierra con respecto al Sol?
29. Una barra roscada con 12.0 vueltas/cm y un diámetro de 1.18 cm está montada horizontalmente. Se atornilla a la barra una solera con un orificio roscado con el mismo paso que la barra; véase la figura 17. La barra gira a 237 rev/min. ¿Cuánto tiempo le tomará a la solera moverse 1.50 cm a lo largo de la barra?
30. (a) ¿Cuál es la velocidad angular con respecto al eje polar de un punto en la superficie de la Tierra a una latitud de 40°N ? (b) ¿Cuál es la velocidad lineal? (c) ¿Cuáles son los valores para un punto en el ecuador?
31. El volante de una máquina de vapor gira a una velocidad angular constante de 156 rev/min. Cuando se corta el vapor, la fricción de las chumaceras y del aire llevan al volante al reposo en 2.20 h. (a) ¿Cuál es la aceleración angular constante del volante, en rev/min²? (b) ¿Cuántas revoluciones dará el volante antes de llegar al reposo? (c) ¿Cuál es la aceleración lineal tangencial de una partícula a 52.4 cm del eje de rotación cuando el volante está girando a 72.5 rev/min? (d) ¿Cuál es la magnitud de la aceleración lineal total de la partícula en la parte (c)?
32. Un volante giroscópico de 2.83 cm de radio es acelerado desde el reposo a 14.2 rad/s^2 hasta que su velocidad

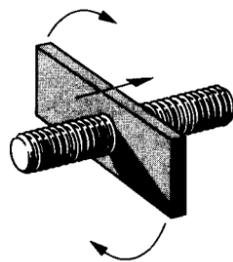


Figura 17 Problema 29.

angular es de 2760 rev/min. (a) ¿Cuál es la aceleración tangencial de un punto situado en la llanta del volante? (b) ¿Cuál es la aceleración radial de este punto cuando el volante está girando a plena velocidad? (c) ¿Qué distancia recorre un punto sobre la llanta durante la aceleración?

33. Si una hélice de aeroplano de 5.0 ft (= 1.5 m) de radio gira a 2000 rev/min y el aeroplano es impulsado a una velocidad en tierra de 300 mi/h (= 480 km/h), ¿cuál es la velocidad de un punto en la punta de la hélice, visto por (a) el piloto y (b) un observador en tierra? Supóngase que la velocidad del aeroplano es paralela al eje de rotación de la hélice.
34. Un método antiguo para medir la velocidad de la luz hace uso de una rueda dentada que gira. Un rayo de luz que pasa a través de una ranura en el borde exterior de la rueda, como en la figura 18, viaja hasta un espejo distante, y regresa a la rueda en el momento preciso para pasar a través de la siguiente ranura de la rueda. Esta rueda dentada tiene un radio de 5.0 cm y 500 dientes en su borde. Las mediciones tomadas cuando el espejo estaba a una distancia $L = 500$ m de la rueda indicaron una velocidad de la luz de 3.0×10^8 km/s. (a) ¿Cuál era la velocidad angular (constante) de la rueda? (b) ¿Cuál era la velocidad lineal de un punto en su borde?
35. Una rueda A de radio $r_A = 10.0$ cm está acoplada por medio de una banda B a otra rueda C de radio $r = 25.0$ cm, como se muestra en la figura 19. La rueda A aumenta su velocidad angular desde el reposo a razón de una cantidad uniforme de 1.60 rad/s^2 . Determine en cuánto tiempo llegará la rueda C a una velocidad de rotación de 100 rev/min, suponiendo que la banda no se deslice. (Sugerencia: Si la

banda no se desliza, las velocidades lineales en la periferia de las dos ruedas deben ser iguales.)

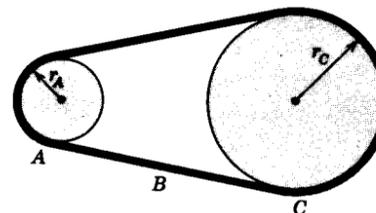


Figura 19 Problema 35.

36. Las aspas de un molino de viento parten del reposo y giran con una aceleración angular de 0.236 rad/s^2 . ¿Cuánto tiempo pasa antes de que un punto sobre un aspa experimente el mismo valor para las magnitudes de la aceleración centrípeta y de la aceleración tangencial?
37. Un cuerpo rígido, que parte del reposo, gira con respecto a un eje fijo con aceleración angular constante α . Considérese una partícula a una distancia r del eje. Expresé (a) la aceleración radial y (b) la aceleración tangencial de esta partícula en términos de α , r , y el tiempo t . (c) Si la aceleración resultante de la partícula en cierto instante forma un ángulo de 57.0° con la aceleración tangencial, ¿qué ángulo total ha girado el cuerpo hasta ese momento?
38. El disco de un sistema de audio para disco digital compacto tiene un radio interior y exterior de su material grabado (los conciertos para violín de Tchaikovsky y de Mendelssohn) de 2.50 cm y 5.80 cm, respectivamente. Al funcionar, el disco es barrido con una velocidad lineal constante de 130 cm/s, comenzando desde el borde interior y moviéndose hacia afuera. (a) Si la velocidad angular inicial del disco es de 50.0 rad/s, ¿cuál es su velocidad angular final? (b) Las líneas en espiral del barrido están a una

separación de $1.60 \mu\text{m}$ aparte; ¿cuál es la longitud total del barrido? (c) ¿Cuál es el tiempo de la grabación sonora?

39. Un automóvil que viaja a 97 km/h tiene ruedas de 76 cm de diámetro. (a) Halle la velocidad angular de las ruedas con respecto al eje. (b) El automóvil es llevado a un alto uniformemente a las 30 vueltas de las ruedas. Calcule la aceleración angular. (c) ¿Qué distancia recorre el automóvil durante este periodo de frenado?
40. Un velocímetro colocado en la rueda frontal de una bicicleta da una lectura que es directamente proporcional a la velocidad angular de la rueda. Suponga que tal velocímetro esté calibrado para una rueda de 72 cm de diámetro pero que, equivocadamente, se instala en una rueda de 62 cm de diámetro. ¿Estaría equivocada la lectura de la velocidad lineal? De ser así, ¿en qué sentido y por qué fracción de la velocidad real?

Sección 11-6 Relaciones entre las variables lineales y angulares: forma vectorial

41. Un objeto se mueve en el plano xy de modo que $x = R \cos \omega t$ y $y = R \sin \omega t$. Aquí x y y son las coordenadas del objeto, t es el tiempo y R y ω son constantes. (a) Elimínese a t entre estas ecuaciones para hallar la ecuación de la curva en la que se mueve el objeto. ¿Cuál es esta curva? ¿Cuál es el significado de la constante ω ? (b) Diferencie las ecuaciones para x y y con respecto al tiempo para hallar las componentes x y y de la velocidad del cuerpo, v_x y v_y . Combine a v_x y a v_y para hallar la magnitud y la dirección de v . Describa el movimiento del objeto. (c) Diferencie a v_x y a v_y con respecto al tiempo para obtener la magnitud y la dirección de la aceleración resultante.
42. Un objeto rígido que gira con respecto al eje z está decelerando a razón de 2.66 rad/s^2 . Considérese una partícula ubicada en $\mathbf{r} = 1.83\mathbf{j} + 1.26\mathbf{k}$ (en metros). En el instante en que $\boldsymbol{\omega} = 14.3\mathbf{k}$ (en rad/s), halle (a) la velocidad de la partícula y (b) su aceleración. (c) ¿Cuál es el radio de la trayectoria circular de la partícula?

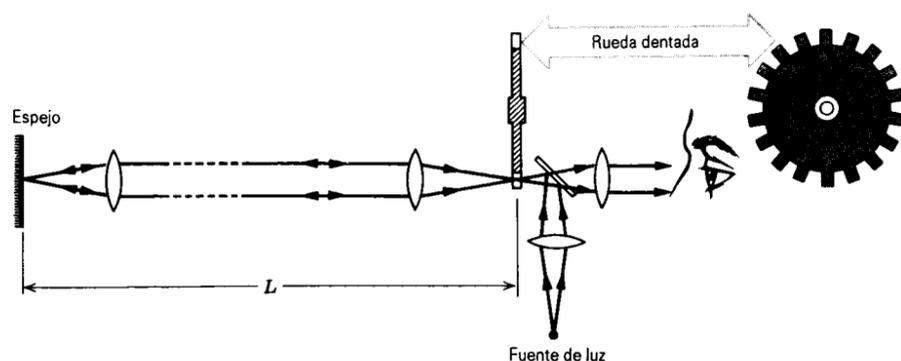


Figura 18 Problema 34.